Сибирский математический журнал
Июль—август, 2017. Том 58, № 4

УДК 519.652

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ПАРАБОЛИЧЕСКИМ СПЛАЙНОМ ФУНКЦИЙ С БОЛЬШИМИ ГРАДИЕНТАМИ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

И. А. Блатов, А. И. Задорин, Е. В. Китаева

Аннотация. Рассматривается задача параболической сплайн-интерполяции по Субботину функций, имеющих область больших градиентов. В случае широко применяемой кусочно равномерной сетки Шишкина получены двусторонние оценки погрешности на классе функций с экспоненциальным пограничным слоем. Доказано, что оценки погрешности сплайн-интерполяции не являются равномерными по малому параметру, а сама погрешность может неограниченно возрастать при стремлении малого параметра к нулю при фиксированном числе узлов N. Приводятся результаты численных экспериментов.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.403

Ключевые слова: пограничный слой, большие градиенты, параболический сплайн, сетка Шишкина, оценка погрешности интерполяции.

Введение

Параболические сплайны широко применяются для гладкой интерполяции функций. Такие сплайны исследованы в [1–4] и во многих других работах. Представляет интерес разработка сплайн-интерполяционных формул для функций с большими градиентами.

Как известно, решения сингулярно возмущенных задач, на основе которых моделируются конвективно-диффузионные процессы с преобладающей конвекцией, имеют большие градиенты в области пограничного слоя. Вследствие этого классические разностные схемы не обладают свойством сходимости, если коэффициент диффузии меньше шага сетки. В связи с этим широко развиваются методы построения специальных разностных схем для решения сингулярно возмущенных задач. Наибольшее распространение получил подход, основанный на сгущении сетки в пограничном слое. Для этой цели широко используются сетки Н. С. Бахвалова [5] и Г. И. Шишкина [6].

При применении разностных схем к решению сингулярно возмущенных задач возникает необходимость восстановления функции для всех значений независимой переменной. В [7] показано, что применение линейной интерполяции к функции с большими градиентами в погранслое может приводить к погрешностям порядка $O(1)$. В [8] исследован вопрос применения многочленов Лагранжа для интерполяции функций, имеющих большие градиенты в экспоненциальном

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 15–01–06584–а, 16–01–00727–а).

пограничном слое [6], на сетке Шишкина. Получена оценка погрешности, равномерная по малому параметру ε. Таким образом, можно применять кусочно полиномиальную интерполяцию на сетке Шишкина. Но такая интерполяция не является гладкой. В [9] построен аналог параболического сплайна дефекта 1, точный на погранслойной составляющей интерполируемой функции. Доказано, что погрешность интерполяции равномерна по погранслойной составляющей и ее производным.

В данной работе исследуется вопрос сплайновой интерполяции функции одной переменной с большими градиентами в области экспоненциального пограничного слоя. Применяется параболическая сплайн-интерполяция по Субботину [3] на сетке Шишкина. Получены оценки погрешности интерполяции, которые, однако, не равномерны по возмущающему ε. Доказано, что при $\varepsilon \to 0$ погрешность интерполяции может неограниченно возрастать и необходима разработка специальных методов интерполяции для данного класса задач. Как показано в [10], многие важные свойства интерполяционных сплайнов определяются свойствами матриц, элементы которых представляют собой скалярные произведения B-сплайнов. Доказательства основных результатов данной статьи также получены путем детального изучения этих матриц. Отметим, что расходимость интерполяционных процессов кубическими и параболическими сплайнами на неравномерных сетках рассматривалась в работах [2, 11, 12] и ряде других, однако рассмотренные там примеры расходимости либо носили очень искусственный характер, либо устанавливались неявным образом с помощью теоремы Банаха — Штейнгауза. В настоящей статье показана неравномерность по малому параметру сходимости сплайновой интерполяции на широком классе функций, соответствующих решениям сингулярно возмущенных задач.

Основные обозначения. Пусть $\Omega : x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_N = 1$ — разбиение отрезка $[0, 1]$. Обозначим через $S(\Omega, k, 1)$ пространство полиномиальных сплайнов степени k дефекта 1 [4] на сетке Ω. В случае необходимости будем считать разбиение Ω продолженным левее точки 0 с шагом $h_1 = x_1 - x_0$ и правее точки 1 с шагом $h_N = x_N - x_{N-1}$. Под C и C_j будем подразумевать положительные постоянные, не зависящие от параметра ε и числа узлов сетки. При этом один и тот же символ C_j может обозначать разные константы. Будем писать $f = O(g)$, если справедлива оценка $|f| \le C|g|$, и $f = O^*(g)$, если $f = O(g)$ и $g = O(f)$. Обозначаем через $C[a, b]$, $L_2[a, b]$ пространства непрерывных и квадратично суммируемых на $[a, b]$ функций с нормами $\|\cdot\|_{C[a,b]}$, $\|\cdot\|_{L_2[a,b]}$ соответственно, $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L_2[a, b]$.

1. Постановка задачи

Будем предполагать, что интерполируемая функция $u(x)$ представима в виде

$$u(x) = q(x) + \Phi(x), \quad x \in [0, 1],$$

$$|q^{(j)}(x)| \le C_1, \quad |\Phi^{(j)}(x)| \le \frac{C_1}{\varepsilon^j} e^{-\alpha x/\varepsilon}, \quad 0 \le j \le 3, \tag{1.1}$$

где функции $q(x)$ и $\Phi(x)$ в явном виде не заданы, $\alpha > 0$, $\varepsilon \in (0, 1]$, C_1 не зависит от ε, α отделено от нуля. Согласно (1.1) регулярная составляющая $q(x)$ имеет производные, ограниченные до третьего порядка, а погранслойная составляющая $\Phi(x)$ имеет производные, не ограниченные равномерно по ε. Представление (1.1) справедливо для решения краевой задачи с экспоненциальным пограничным слоем [6, 13].

Зададим параболический сплайн по Субботину [3] для интерполяции функции (1.1).

Пусть Ω — сетка интервала $[0,1]$ с узлами $\{x_n\}$, где $0 \le n \le N$, $h_n = x_n - x_{n-1}$, $1 \le n \le N$. Зададим дополнительную сетку:

$$\overline{\Omega} = \Big\{ \bar{x}_n,\ -1 \le n \le N;\ \bar{x}_n = \frac{x_n + x_{n+1}}{2},\ 0 \le n \le N-1,$$
$$\bar{x}_{-1} = x_0 - \frac{h_1}{2},\ \bar{x}_N = x_N + \frac{h_N}{2} \Big\}.$$

Пусть $g_2(x,u) \in S(\overline{\Omega}, 2, 1)$ — интерполяционный параболический сплайн на сетке $\overline{\Omega}$, определяемый из следующих условий:

$$g_2(x_n,u) = u(x_n), \quad 0 \le n \le N, \quad g_2'(0,u) = u'(0), \quad g_2'(1,u) = u'(1). \tag{1.2}$$

Согласно [6] зададим кусочно равномерную сетку Ω с шагами:

$$h_n = h = \frac{\sigma}{N/2},\ n = 1,\ldots,\frac{N}{2}, \quad h_n = H = \frac{1-\sigma}{N/2},\ n = \frac{N}{2}+1,\ldots,N,$$
$$\sigma = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{3\varepsilon}{\alpha}\ln N\right\}. \tag{1.3}$$

Сетка вида (1.3) применяется для обеспечения ε-равномерной сходимости разностных схем для сингулярно возмущенных краевых задач [6, 14]. В данной работе проведем анализ погрешности при применении квадратичного сплайна (1.2) на сетке (1.3), предполагая, что интерполируемая функция имеет область больших градиентов в соответствии с представлением (1.1). Параметр σ в (1.3) выбран так, что в области больших градиентов шаг сетки порядка $O(\varepsilon \ln(N)/N)$, а вне погранслойной области шаг порядка $O(1/N)$ и $|\Phi(x)| \le CN^{-3}$, что соответствует погрешности параболического сплайна в регулярном случае, когда интерполируемая функция имеет ограниченные производные.

В (1.3) и ниже считаем что $N = 2N_0 \ge 6$.

Итак, пусть функция $u(x)$, имеющая представление (1.1), задана в узлах сетки Ω, $u_n = u(x_n)$, $n = 0,1,\ldots,N$. Исследуем погрешность интерполяции этой функции параболическим сплайном $g_2(x,u)$ на сетке (1.3).

2. Формулировка основных результатов

В соответствии с [2, гл. 1, § 3] для интерполяционного параболического сплайна $g_2(x,u)$ справедлива оценка погрешности:

$$|g_2(x,u) - u(x)| \le C\|u^{(3)}\|_{C[0,1]} \max_n h_n^3, \quad x \in [0,1]. \tag{2.1}$$

Из (2.1) следует, что если производная $u^{(3)}(x)$ ограниченная, то сплайн $g_2(x,u)$ обладает третьим порядком точности по шагу сетки. Однако в силу (1.1) производная $u^{(3)}(x)$ неограниченно растет у границы $x = 0$ с уменьшением ε и в этом случае оценка (2.1) не равномерна по малому параметру.

Остановимся на случае, когда в (1.3) будет $\sigma = 1/2$. В силу (2.1) и того, что в этом случае $\max_n h_n = 1/N$, $\|u^{(3)}\|_{C[0,1]} \le C\varepsilon^{-3} \le C_1 \ln^3 N$, имеет место оценка, равномерная по ε:

$$\|u(x) - g_2(x,u)\|_{C[0,1]} \le CN^{-3}\ln^3 N. \tag{2.2}$$

Ниже будем предполагать, что $\sigma < 1/2$. Для упрощения выкладок будем считать, что в (1.1), (1.3) $\alpha = 1$, так как значение параметра α не влияет на обоснование приводимых ниже оценок. Заметим, что $g_2(x,u) = g_2(x,q) + g_2(x,\Phi)$, а в силу (1.1) и (2.1)

$$\|q(x) - g_2(x,q)\|_{C[0,1]} \le C_1 \max_n h_n^3 \le C_2 N^{-3}. \tag{2.3}$$

Поэтому для того чтобы сплайн имел погрешность порядка $O(N^{-3}\ln^3 N)$, необходимо и достаточно обеспечить оценку

$$\|\Phi(x) - g_2(x,\Phi)\|_{C[0,1]} \le CN^{-3}\ln^3 N. \tag{2.4}$$

Сформулируем основные результаты работы.

Теорема 1. *Найдутся такие константы C, C_3, что при $N^{-1} \le C_3\varepsilon$ будет справедлива оценка* (2.2).

Теорема 2. *Найдутся такие константы C_4, C_5 и $\beta > 0$, не зависящие от ε, N, что при $\varepsilon \le C_4 N^{-1}$ будут справедливы оценки*

$$\|g_2(x,\Phi) - \Phi(x)\|_{C[x_n,x_{n+1}]} \le C_5 \begin{cases} N^{-3}\ln^3 N, & 0 \le n \le N/2 - 1, \\ \frac{1}{N^4\varepsilon} e^{-\beta(n-N/2)}, & N/2 \le n \le N-1. \end{cases} \tag{2.5}$$

Следующая теорема показывает, что вторая оценка в (2.5) неулучшаема.

Теорема 3. *Пусть $\Phi(x) = e^{-x/\varepsilon}$. Тогда найдутся такие $C_6, C_7, \beta_1 > 0$, не зависящие от ε, N, что при $\varepsilon \le C_6 N^{-1}$ справедливы оценки снизу*

$$\|g_2(x,\Phi) - \Phi(x)\|_{C[x_n,x_{n+1}]} \ge \frac{C_7}{N^4\varepsilon} e^{-\beta_1(n-N/2)}, \quad \frac{N}{2} \le n \le N-1. \tag{2.6}$$

3. Вспомогательные результаты

Введем обозначения. Пусть при $-1 \le n \le N-1$

$$M_{n,1}(x) = \sigma_n \begin{cases} \frac{x-x_n}{x_{n+1}-x_n}, & x \in [x_n, x_{n+1}], \\ \frac{x_{n+2}-x}{x_{n+2}-x_{n+1}}, & x \in [x_{n+1}, x_{n+2}], \\ 0, & x \notin [x_n, x_{n+2}) \end{cases}$$
$$\sigma_n = \begin{cases} \frac{4}{3h}, & -1 \le n \le \frac{N}{2} - 2, \\ \frac{8}{3(h+H)}, & n = \frac{N}{2} - 1, \\ \frac{4}{3H}, & \frac{N}{2} \le n \le N-1. \end{cases} \tag{3.1}$$

Здесь $M_{n,1}(x)$ — соответствующим образом нормированный B-сплайн первой степени на сетке Ω и

$$N_{n,0}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [\bar{x}_n, \bar{x}_{n+1}), \\ 0, & x \notin [\bar{x}_n, \bar{x}_{n+1}) \end{cases} \tag{3.2}$$

— нормализованный B-сплайн нулевой степени на сетке $\overline{\Omega}$.

Далее для краткости будем использовать обозначение $g_2(x) = g_2(x,\Phi)$. Изучим функцию $g_2''(x)$. Обозначим через P ортогональный в $L_2[0,1]$ проектор на $S(\Omega,1,1)$.

Лемма 1. *Справедлива формула* $Pg_2''(x) = P\Phi''(x)$.

Доказательство. Для произвольной функции $s(x) \in S(\Omega, 1, 1)$ с учетом граничных условий и условий интерполяции (1.2) имеем

$$(g_2'' - \Phi'', s) = (g_2'(x) - \Phi'(x))s(x)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 (g_2'(x) - \Phi'(x))s'(x)\,dx$$
$$= -\sum_{i=0}^{N-1} (g_2(x) - \Phi(x))\Big|_{x_i}^{x_{i+1}} s'(x_i) = 0.$$

Лемма доказана.

Представим функцию $g_2''(x)$ в виде

$$g_2''(x) = \sum_{k=-1}^{N-1} \alpha_k N_{k,0}(x). \tag{3.3}$$

Из условия ортогональности разности $g_2''(x, \Phi) - \Phi''(x)$ пространству $S(\Omega, 1, 1)$ получаем СЛАУ для коэффициентов

$$\sum_{k=-1}^{N-1} \alpha_k (N_{k,0}, M_{n,1}) = (\Phi'', M_{n,1}), \quad -1 \le n \le N-1, \tag{3.4}$$

или в матричном виде

$$\Gamma\alpha = F, \tag{3.5}$$

где $\Gamma = \{\gamma_{nk}\} = \{(N_{k,0}, M_{n,1})\}$, $F = (F_{-1}, F_0, \dots, F_{N-1})^T$, $F_j = (\Phi'', M_{j,1})$.

Лемма 2. *Матрица* Γ *имеет вид*

$$\Gamma = \mathrm{tridiag}\{a_n, c_n, b_n\},\ -1 \le n \le N-1, \quad a_{-1} = b_{N-1} = 0, \quad c_{-1} = c_{N-1} = \frac{1}{2}, \tag{3.6}$$

$$c_n = 1,\ 0 \le n \le N-2, \quad a_n = b_n = \frac{1}{6}, \quad -1 \le n \le N-2,\ n \ne N/2-1, \tag{3.7}$$

$$b_{N/2-1} = \frac{H}{3(h+H)}, \quad a_{N/2-1} = \frac{h}{3(h+H)}. \tag{3.8}$$

Доказательство получается прямым вычислением интегралов в (3.5) с учетом (3.1), (3.2).

Обозначим через $\mathrm{cond}_2(\Gamma)$ спектральное число обусловленности матрицы Γ.

Следствие 1. *Матрица* Γ *имеет вид*

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{pmatrix}, \tag{3.9}$$

где $\Gamma, \Gamma_{11}, \Gamma_{22}$ *— трехдиагональные квадратные матрицы со строгим диагональным преобладанием порядка* $(N+1)\times(N+1)$, $(N/2)\times(N/2)$ *и* $(N/2+1)\times(N/2+1)$ *соответственно, причем* $\mathrm{cond}_2(\Gamma) = O(1)$, $\mathrm{cond}_2(\Gamma_{ii}) = O(1)$, $i = 1, 2$, *матрица* Γ_{21} *— прямоугольная матрица с единственным ненулевым элементом порядка* $O(h/H)$ *в правом верхнем углу, матрица* Γ_{12} *— прямоугольная матрица с единственным ненулевым элементом* $1/6$ *в левом нижнем углу.*

Данное следствие справедливо, так как в силу (3.6)–(3.8) все три матрицы $\Gamma, \Gamma_{11}, \Gamma_{22}$ имеют строгое диагональное преобладание по строкам с положительным и не зависящим от ε, N показателем преобладания.

Лемма 3. *Матрицы* Γ_{11}, Γ_{22} *обратимы, и для элементов обратных матриц* $\hat{\gamma}^{ii}_{nk}, i = 1, 2$, *справедливы оценки*

$$\left|\hat{\gamma}^{ii}_{nk}\right| \le Ce^{-\beta|n-k|}, \tag{3.10}$$

а для элементов $\hat{\gamma}^{22}_{nk}$ *справедливы и оценки снизу*

$$\left|\hat{\gamma}^{22}_{nk}\right| \ge C_1 e^{-\beta_1|n-k|}, \tag{3.11}$$

а также оценки

$$\left|\hat{\gamma}^{22}_{nk}\right| \ge \left|\hat{\gamma}^{22}_{np}\right| e^{-\beta_2|k-p|}, \quad N/2-1 \le n \le N-1, \ N/2-1 \le k \le p \le N-1, \tag{3.12}$$

где $C, C_1, \beta, \beta_1, \beta_2$ *не зависят от* N, ε.

Доказательство. Обратимость матриц Γ_{11}, Γ_{22} и оценки (3.10) вытекают из строгого диагонального преобладания и теоремы Демко [15]. Докажем оценки (3.11). Введем матрицу

$$M = \{m_{nk}, \ N/2-1 \le n, k \le N-1\} = \mathrm{tridiag}\left\{\frac{1}{6}, 1, \frac{1}{6}\right\}.$$

Так как $h \le H$, из (3.6)–(3.8) следует, что $\gamma^{22}_{nn} \le m_{nn}$, $\gamma^{22}_{nk} \ge m_{nk}$, $n \ne k$.

Тогда для M-матриц [16, § 36] $M^+ = \{m^+_{nk}\}$ и $\Gamma^+_{22} = \left\{\left(\gamma^{22}_{nk}\right)^+\right\}$, получающихся из M и Γ_{22} заменой знаков всех внедиагональных элементов противоположными, согласно [16, § 36] будем иметь

$$(\Gamma^+_{22})^{-1} \ge (M^+)^{-1} \ge \mathbf{0}, \tag{3.13}$$

где неравенство между матрицами подразумевается поэлементным.

Непосредственным перемножением исходных и обратных матриц легко убедиться, что для элементов $\Gamma^{-1}_{22} = \left\{\hat{\gamma}^{22}_{nk}\right\}$ и $M^{-1} = \{\widehat{m}_{nk}\}$ справедливы равенства

$$\hat{\gamma}^{22}_{nk} = (-1)^{n+k}\widehat{\left(\gamma^{22}_{nk}\right)^+}, \quad \widehat{m}_{nk} = (-1)^{n+k}\widehat{(m_{nk})^+}. \tag{3.14}$$

Поэтому приходим к выводу, что

$$\left|\hat{\gamma}^{22}_{nk}\right| \ge |\widehat{m}_{nk}|. \tag{3.15}$$

Заметим, что из тех же соображений, рассматривая пару матриц M^+ и I, где I — единичная матрица, получаем

$$\widehat{m}_{kk} \ge 1. \tag{3.16}$$

С учетом (3.15) для доказательства (3.11) достаточно доказать оценку

$$|\widehat{m}_{nk}| \ge C_1 e^{-\beta_1|n-k|}. \tag{3.17}$$

Рассмотрим $\{\widehat{m}_{nk}\}$ как решение краевой задачи для трехточечного разностного уравнения

$$\widehat{m}_{n-1k} + 6\widehat{m}_{nk} + \widehat{m}_{n+1k} = 0, \quad N/2-1 \le n \le k-1,$$

с заданными граничными значениями $\widehat{m}_{N/2-2,k} = 0$ и $\widehat{m}_{kk}$, где $1 \le \widehat{m}_{kk} \le C$. Согласно [17, гл. 1, § 4] находим

$$\widehat{m}_{nk} = \left[\lambda_1^{n-N/2+2} - \lambda_2^{n-N/2+2}\right] / \left[\lambda_1^{k-N/2+1} - \lambda_2^{k-N/2+1}\right]\widehat{m}_{kk}, \quad N/2-1 \le n \le k-1,$$

где $\lambda_{1,2} = -3 \pm \sqrt{8}$. Отсюда следует оценка (3.17) для $N/2-1 \le n \le k-1$.

Доказательство для $k+1 \le n \le N-1$ аналогично, а при $n = k$ оценка (3.17) вытекает из (3.16). Итак, оценка (3.11) доказана.

Докажем (3.12). Для элементов Γ^{-1} при фиксированном $n \in [N/2-1, N-1]$ справедливы формулы $\hat\gamma^{22}_{nk-1}\gamma^{22}_{k-1k} + \hat\gamma^{22}_{nk} + \hat\gamma^{22}_{nk+1}\gamma^{22}_{k+1k} = 0$, $k \ne n$. Из (3.13), (3.14) следует, что $\operatorname{sign}\bigl(\hat\gamma^{22}_{nk-1}\bigr) = \operatorname{sign}\bigl(\hat\gamma^{22}_{nk+1}\bigr)$. Отсюда с учетом положительности γ^{22}_{kk} и (3.6)–(3.8) получаем, что для $k \ne n$

$$\bigl|\hat\gamma^{22}_{nk}\bigr| \ge \bigl|\hat\gamma^{22}_{nk+1}\gamma^{22}_{k+1k}\bigr| \ge \frac{1}{6}\bigl|\hat\gamma^{22}_{nk+1}\bigr|,$$

и оценка (3.12) получается рекуррентно для $k \ne n$ при $\beta_2 = \ln 6$.

Для $k = n$ она вытекает из (3.10) и неравенства $\hat\gamma^{22}_{kk} \ge 1$, которое следует из (3.13)–(3.16). Лемма доказана.

Лемма 4. *Для элементов F_n при любых $\varepsilon \in (0,1], N$ справедливы оценки*

$$F_n = \begin{cases} O(\varepsilon^{-2} e^{-x_{n+1}/\varepsilon}), & -1 \le n \le N/2-2, \\ O(\varepsilon^{-2} e^{-x_n/\varepsilon}), & N/2-1 \le n \le N-1, \end{cases} \tag{3.18}$$

а при $\varepsilon \le CN^{-1}$ также справедливы оценки

$$F_n = \begin{cases} O(H^{-1}\varepsilon^{-1} e^{-x_{N/2}/\varepsilon}), & n = N/2-1, \\ O(H^{-2} e^{-x_n/\varepsilon}), & N/2 \le n \le N-1. \end{cases} \tag{3.19}$$

В случае, если $\Phi(x) = e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$, справедливы аналогичные оценки снизу, т. е. с заменой в (3.18), (3.19) *O на O^*.*

Доказательство. Для оценки F_n, задаваемой в (3.5), используем прямое вычисление интегралов. Докажем вторую оценку в (3.19), остальные получаются аналогично. При $n \ge N/2$ в силу (3.1), (3.2), (1.1) имеем

$$\begin{aligned} |F_n| = |(\Phi'', M_{n,1})| &\le \int\limits_{x_n}^{x_{n+2}} |M_{n,1}(x)| \cdot |\Phi''(x)|\,dx \\ &\le C \int\limits_{x_n}^{x_{n+2}} \frac{8}{3(h+H)} \frac{x-x_n}{H} \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\,dx \\ &\le CH^{-2} e^{-\frac{x_n}{\varepsilon}} \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{x_n}^{x_{n+2}} \frac{x-x_n}{\varepsilon} e^{-\frac{x-x_n}{\varepsilon}}\,dx \le C_1 H^{-2} e^{-\frac{x_n}{\varepsilon}}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Если $\Phi(x) = e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$, то все интегралы вычисляются точно и оценки будут двусторонними. $\square$

Лемма 5. *Для матрицы Γ^{-1} справедливо представление*

$$\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} \widetilde\Gamma_{11} & \widetilde\Gamma_{12} \\ \widetilde\Gamma_{21} & \widetilde\Gamma_{22} \end{pmatrix}, \tag{3.20}$$

где элементы $\tilde\gamma^{ij}_{nk}$ матриц $\widetilde\Gamma_{ij}$ при некотором $\beta > 0$, не зависящем от ε, N, удовлетворяют оценкам

$$\begin{aligned} \bigl|\tilde\gamma^{11}_{nk}\bigr| &\le Ce^{-\beta|n-k|}, \quad -1 \le n,k \le N/2-2; \\ \bigl|\tilde\gamma^{22}_{nk}\bigr| &\le Ce^{-\beta|n-k|}, \quad N/2-1 \le n,k \le N-1, \end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\left|\tilde{\gamma}_{nk}^{12}\right| \le Ce^{-\beta|n-k|}, \quad -1 \le n \le N/2-2, \; N/2-1 \le k \le N-1, \tag{3.22}$$

$$\left|\tilde{\gamma}_{nk}^{21}\right| \le C(h/H)e^{-\beta|n-k|}, \quad -1 \le k \le N/2-2, \; N/2-1 \le n \le N-1. \tag{3.23}$$

Доказательство. Применяя блочный метод Гаусса, находим

$$\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^{-1} + \Gamma_{11}^{-1}\Gamma_{12}\widetilde{\Gamma}^{-1}\Gamma_{21}\Gamma_{11}^{-1} & \Gamma_{11}^{-1}\Gamma_{12}\widetilde{\Gamma}^{-1} \\ \widetilde{\Gamma}^{-1}\Gamma_{21}\Gamma_{11}^{-1} & \widetilde{\Gamma}^{-1} \end{pmatrix}, \tag{3.24}$$

где $\widetilde{\Gamma} = \Gamma_{22} - \Gamma_{21}\Gamma_{11}^{-1}\Gamma_{12}$. Обратимость всех блоков и равномерная по ε, N ограниченность всех обратных матриц вытекает из следствия 1. Более того, из теоремы Демко [15] следует, что элементы матрицы Γ_{11}^{-1} удовлетворяют оценкам (3.21), а значит, в силу вида матриц Γ_{12}, Γ_{21} таким же оценкам удовлетворяют и элементы матрицы $\widetilde{\Gamma}$. Но для матриц, имеющих обратную, ограниченную в спектральной норме константой, не зависящей от порядка матрицы и параметров, определяющих ее элементы, в [18] доказано, что и элементы обратной матрицы $\widetilde{\Gamma}^{-1}$ удовлетворяют таким же оценкам, возможно, с другой константой $\beta_1 \in (0,1)$, также не зависящей от N, ε. Там же доказано, что элементы произведения двух матриц, удовлетворяющих оценкам вида (3.21), удовлетворяют таким же оценкам, возможно, с другой константой $\beta_1 \in (0,1)$. Отсюда вытекают оценки (3.21).

Докажем оценки (3.22). Пусть

$$\widetilde{\Gamma}^{-1} = \{\tilde{\gamma}_{nk}, \; N/2-1 \le n,k \le N-1\},$$

$$\Gamma_{12} = \{\gamma_{nk}, \; 1 \le n \le N/2-2, \; N/2-1 \le k \le N-1\},$$

$$\Gamma_{11}^{-1} = \left\{\tilde{\gamma}_{nk}^{11}, \; 1 \le n,k \le N/2-2\right\}.$$

Поскольку у матрицы Γ_{12} отличен от нуля единственный элемент $\gamma_{N/2-2,N/2-1}$, перемножая матрицы, для элементов матрицы $\widetilde{\Gamma}_{12}$ из (3.20) находим

$$\tilde{\gamma}_{nk}^{12} = \tilde{\gamma}_{n,N/2-2}^{11}\gamma_{N/2-2,N/2-1}\tilde{\gamma}_{N/2-2,k}.$$

Отсюда, учитывая оценки (3.21) для первого и третьего сомножителей и формулу (3.7) для второго сомножителя, получаем

$$\left|\tilde{\gamma}_{nk}^{12}\right| \le Ce^{-\beta((N/2-2)-n)}e^{-\beta(k-(N/2-2))} = Ce^{-\beta(k-n)} = Ce^{-\beta|k-n|}.$$

Оценки (3.22) доказаны.

Доказательство оценок (3.23) проводится аналогично. Лемма доказана.

Лемма 6. *Для коэффициентов α_n в представлении (3.3) при $\varepsilon \le CN^{-1}$ справедливы оценки*

$$\alpha_n = \begin{cases} O(\varepsilon^{-2}e^{-x_{n+1}/\varepsilon}), & -1 \le n \le N/2-2, \\ O(H^{-1}\varepsilon^{-1}e^{-x_{N/2}/\varepsilon}e^{-\beta(n-N/2)}), & N/2-1 \le n \le N-1, \end{cases} \tag{3.25}$$

а при $N^{-1} \le C\varepsilon$ справедливы оценки

$$\alpha_n = O(\varepsilon^{-2}e^{-x_{n+1}/\varepsilon}), \quad -1 \le n \le N-1. \tag{3.26}$$

В случае, если $\Phi(x) = e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$, найдется такая константа C, не зависящая от ε, N, что при $\varepsilon \le CN^{-1}$ для $n \ge N/2-1$ в (3.25) справедливы аналогичные оценки снизу, т. е. с заменой O на O^*.

Доказательство. Из (3.5) имеем $\alpha = \Gamma^{-1}F$. Пусть $\alpha = (\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)})^T$, где $\dim(\alpha^{(1)}) = N/2$. Аналогичным образом представим F. Тогда $\alpha^{(1)} = \widetilde{\Gamma}_{11}F^{(1)} + \widetilde{\Gamma}_{12}F^{(2)}$.

Для любого $n \in [-1, N/2-2]$ имеем

$$\alpha_n^{(1)} = \alpha_n = \sum_{k=-1}^{N/2-2} \tilde{\gamma}_{nk}^{11} F_k + \sum_{k=N/2-1}^{N-1} \tilde{\gamma}_{nk}^{12} F_k. \tag{3.27}$$

Далее в силу (3.18), (3.21), (3.22) при достаточно больших N получим

$$\left|\sum_{k=-1}^{N/2-2} \tilde{\gamma}_{nk}^{11} F_k\right| \le \frac{C}{\varepsilon^2} \sum_{k=-1}^{N/2-2} e^{-\beta|n-k|} e^{-x_{k+1}/\varepsilon} = \frac{C}{\varepsilon^2} \sum_{k=-1}^{N/2-2} e^{-\beta|n-k|} e^{-\frac{h(k+1)}{\varepsilon}}$$

$$= \frac{C}{\varepsilon^2} e^{-\frac{h(n+1)}{\varepsilon}} \sum_{k=-1}^{N/2-2} e^{-\beta|n-k|} e^{-\frac{h(k-n)}{\varepsilon}} = C\varepsilon^{-2} e^{-\frac{h(n+1)}{\varepsilon}} \sum_{k=-1}^{N/2-2} e^{-\beta|n-k|} e^{-\frac{8\ln N(k-n)}{N}}$$

$$\le C\varepsilon^{-2} e^{-\frac{x_{n+1}}{\varepsilon}} \sum_{k=-1}^{N/2-2} e^{-\frac{\beta}{2}|n-k|} \le C\varepsilon^{-2} e^{-x_{n+1}/\varepsilon}, \tag{3.28}$$

$$\left|\sum_{k=N/2-1}^{N-1} \tilde{\gamma}_{nk}^{12} F_k\right| \le C \sum_{k=N/2-1}^{N-1} e^{-\beta|n-k|} \varepsilon^{-2} e^{-x_k/\varepsilon}$$

$$\le C\frac{1}{\varepsilon^2} e^{-\frac{x_{N/2-1}}{\varepsilon}} \sum_{k=N/2-1}^{N-1} e^{-\beta|n-k|} \le C_1 \varepsilon^{-2} e^{-x_{N/2-1}/\varepsilon} \le C_1 \varepsilon^{-2} e^{-x_{n+1}/\varepsilon}.$$

Таким образом, оценка (3.25) при $-1 \le n \le N/2-2$ доказана.

Докажем (3.25) для $n \ge N/2-1$. Имеем

$$\alpha_n^{(2)} = \alpha_n = \sum_{k=-1}^{N/2-2} \tilde{\gamma}_{nk}^{21} F_k + \sum_{k=N/2-1}^{N-1} \tilde{\gamma}_{nk}^{22} F_k. \tag{3.29}$$

Аналогично (3.28), применяя (3.23) для $\tilde{\gamma}_{nk}^{21}$ и (3.18), (3.19) для F_k, находим

$$\left|\sum_{k=-1}^{N/2-2} \tilde{\gamma}_{nk}^{21} F_k\right| \le C\frac{h}{H} \sum_{k=-1}^{N/2-2} e^{-\beta(n-k)} \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-x_{k+1}/\varepsilon}$$

$$= C\frac{h}{H} e^{-\beta(n-\frac{N}{2})} \sum_{k=-1}^{N/2-2} e^{-\beta(\frac{N}{2}-k)} \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-x_{k+1}/\varepsilon} \le C_1 \frac{h}{H} e^{-\beta(n-\frac{N}{2})} \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-x_{\frac{N}{2}-1}/\varepsilon}$$

$$\le C_1 H^{-1} \varepsilon \frac{\ln N}{N} \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-x_{\frac{N}{2}-1}/\varepsilon} e^{-\beta(n-\frac{N}{2})} \le \frac{C_2}{H\varepsilon} e^{-x_{\frac{N}{2}}/\varepsilon} e^{-\beta(n-\frac{N}{2})}. \tag{3.30}$$

Оценим второе слагаемое в (3.29). Применяя оценки (3.21) для $\tilde{\gamma}_{nk}^{22}$ и (3.19) для F_k, с учетом того, что по условию леммы $\varepsilon \le CH$, получаем

$$\left|\sum_{k=N/2-1}^{N-1} \tilde{\gamma}_{nk}^{22} F_k\right| \le C\varepsilon^{-1} H^{-1} \sum_{k=N/2-1}^{N-1} e^{-\beta|n-k|} e^{-x_k/\varepsilon}$$

$$= \frac{C}{\varepsilon H} e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}} \sum_{k=N/2-1}^{N-1} e^{-\beta|n-k|} e^{-\frac{x_k - x_{N/2}}{\varepsilon}} \le \frac{C}{\varepsilon H} e^{-x_{\frac{N}{2}}/\varepsilon} e^{\frac{h}{\varepsilon}} \sum_{k=N/2}^{N} e^{-\beta|n-k|} e^{-(k-\frac{N}{2})\frac{H}{\varepsilon}}$$

$$\le \frac{C_1}{\varepsilon H} e^{-x_{\frac{N}{2}}/\varepsilon} \sum_{k=N/2}^{N} e^{-\beta|n-k|} e^{-\beta(k-\frac{N}{2})} = \frac{C_1}{\varepsilon H} e^{-x_{\frac{N}{2}}/\varepsilon} \left(\sum_{k=N/2}^{n} e^{-\beta(n-\frac{N}{2})}\right.$$

$$\left. + \sum_{k=n+1}^{N} e^{-\beta(2k-n-\frac{N}{2})}\right) \le \frac{C_2}{\varepsilon H} e^{-x_{\frac{N}{2}}/\varepsilon} \left(e^{-\frac{\beta}{2}(n-\frac{N}{2})} + e^{-\beta(n-\frac{N}{2})}\right) \le \frac{C_3}{\varepsilon H} e^{-x_{\frac{N}{2}}/\varepsilon} e^{-\frac{\beta}{2}(n-\frac{N}{2})}.$$

Переобозначая $\frac{\beta}{2}$ через β, в силу (3.29), (3.30) приходим к (3.25) для $n \geq N/2-1$.

Тем самым оценки (3.25) доказаны полностью. Оценки (3.26) доказываются совершенно аналогично с использованием (3.18) вместо (3.19) при проведении последней оценки.

Докажем оценки снизу в (3.25) для $n \geq N/2-1$ в случае, если $\Phi(x) = e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$. Обозначим $(\alpha_{N/2-1}, \dots, \alpha_{N-1})^T = \tilde{\alpha}$. Тогда вектор $\tilde{\alpha}$ есть решение СЛАУ $\Gamma_{22}\tilde{\alpha} = \widetilde{F}$, где элементы вектора $\widetilde{F} = \{\widetilde{F}_n,\ N/2-1 \leq n \leq N-1\}$ имеют вид

$$\widetilde{F}_{N/2-1} = F_{N/2-1} - \alpha_{N/2-2}a_{N/2-1}; \quad \widetilde{F}_n = F_n,\ n \geq N/2.$$

В силу (3.19) для $F_{N/2-1}$, (3.8) для $a_{N/2-1}$ и (3.26) для $\alpha_{N/2-2}$

$$|\widetilde{F}_{N/2-1}| \geq C\varepsilon^{-1}H^{-1}e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}} - C_1hH^{-1}\varepsilon^{-2}e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}} = H^{-1}\varepsilon^{-1}e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}}(C - C_1h\varepsilon^{-1}) \geq H^{-1}\varepsilon^{-1}e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}}\left(C - C_2\frac{\ln N}{N}\right) \geq C_3H^{-1}\varepsilon^{-1}e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}},$$

т. е. элементы вектора $\widetilde{F}$ удовлетворяют оценкам, аналогичным (3.19):

$$\widetilde{F}_n = \begin{cases} O^*(H^{-1}\varepsilon^{-1}e^{-x_{N/2}/\varepsilon}), & n = N/2-1, \\ O^*(H^{-2}e^{-x_n/\varepsilon}), & N/2 \leq n \leq N-1. \end{cases} \tag{3.31}$$

Оценим $|\alpha_n|$ для $n \in [N/2-1, N-1]$, опираясь на (3.31):

$$|\alpha_n| = \left|\sum_{k=N/2-1}^{N-1} \hat{\gamma}^{22}_{nk}\widetilde{F}_k\right| \geq \left|\hat{\gamma}^{22}_{n,N/2-1}\widetilde{F}_{N/2-1}\right| - \sum_{k=N/2}^{N-1} |\hat{\gamma}^{22}_{nk}||\widetilde{F}_k|. \tag{3.32}$$

Найдется постоянная C_1 такая, что при $\varepsilon \leq C_1N^{-1}$ будет справедливо неравенство $\frac{H}{\varepsilon} \geq 2\beta_2$, где β_2 соответствует (3.12). Применяя (3.12), (3.31), получаем

$$\sum_{k=N/2}^{N-1} |\hat{\gamma}^{22}_{nk}||\widetilde{F}_k| \leq C\sum_{k=N/2}^{N-1} |\hat{\gamma}^{22}_{nN/2-1}|e^{\beta_2|k-N/2|}H^{-2}e^{-\frac{x_k}{\varepsilon}} = CH^{-2}\left|\hat{\gamma}^{22}_{nN/2-1}\right|e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}}$$
$$\times \sum_{k=N/2}^{N-1} e^{\beta_2|k-N/2|}e^{-\frac{x_k - x_{N/2}}{\varepsilon}} = CH^{-2}\left|\hat{\gamma}^{22}_{nN/2-1}\right|e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}}\sum_{k=N/2}^{N-1} e^{\beta_2|k-N/2|}e^{-\frac{H}{\varepsilon}|k-N/2|}$$
$$\leq CH^{-2}\left|\hat{\gamma}^{22}_{nN/2-1}\right|e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}}\sum_{k=N/2}^{N-1} e^{-\beta_2|k-N/2|} \leq C_1H^{-2}e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}}\left|\hat{\gamma}^{22}_{nN/2-1}\right|. \tag{3.33}$$

Наконец, с учетом (3.31)

$$\left|\hat{\gamma}^{22}_{nN/2-1}\right||\widetilde{F}_{N/2-1}| \geq CH^{-1}\varepsilon^{-1}e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}}\left|\hat{\gamma}^{22}_{nN/2-1}\right|. \tag{3.34}$$

Из (3.32)–(3.34), (3.11) при достаточно малых ε/H получаем

$$|\alpha_n| \geq C_2H^{-1}\varepsilon^{-1}e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}}\left|\hat{\gamma}^{22}_{nN/2-1}\right| \geq C_3H^{-1}\varepsilon^{-1}e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}}e^{-\beta_1(n-N/2)}.$$

Лемма доказана.

Лемма 7. *Найдутся такие константы $C, \beta > 0$, не зависящие от ε, N, что для функции $g_2''(x)$ при $N^{-1} \le C\varepsilon$ справедливо соотношение*

$$g_2''(x_n) = O\left(\frac{C}{\varepsilon^2} e^{-x_n/\varepsilon}\right), \quad 0 \le n \le N, \tag{3.35}$$

а при $\varepsilon \le CN^{-1}$ выполняется

$$g_2''(x_n) = O\left(\frac{C}{\varepsilon^2} e^{-x_n/\varepsilon}\right), \quad 0 \le n \le \frac{N}{2} - 1, \tag{3.36}$$

$$g_2''(x_n) = O\left(\frac{1}{\varepsilon H} e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}} e^{-\beta|n-\frac{N}{2}|}\right), \quad \frac{N}{2} \le n \le N. \tag{3.37}$$

В случае $\Phi(x) = e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$ найдется такая константа $C > 0$, не зависящая от ε, N, что при $\varepsilon \le CN^{-1}$ для $n \ge N/2 - 1$ в (3.36), (3.37) справедливы аналогичные оценки снизу, т. е. с заменой O на O^*.

Доказательство. Поскольку в каждом узле x_n отличен от нуля только один B-сплайн $N_{n-1,0}$, справедливо равенство $g_2''(x_n) = \alpha_{n-1} N_{n-1,0}(x_n)$. Отсюда, из леммы 6 и формулы (3.2) следует утверждение леммы. □

Наконец, установим результат о точности приближения функции $\Phi''(x)$ функцией $g_2''(x, \Phi)$.

Лемма 8. *Справедлива оценка*

$$\|g_2''(x, \Phi) - \Phi''(x)\|_{L_\infty[0,1]} \le \frac{C}{\varepsilon^2} \cdot \frac{\ln N}{N}. \tag{3.38}$$

Доказательство. Обозначим через $Q : L_2[0,1] \to S(\overline{\Omega}, 0, 1)$ линейный оператор, ставящий в соответствие каждой функции $\Phi''(x) \in L_2[0,1]$ функцию $g_2''(x, \Phi)$ вида (3.3), где коэффициенты α_n находятся из системы (3.4). Очевидно, что $QQ = Q$, т. е. Q — проектор. Поскольку матрица системы (3.4) имеет строгое диагональное преобладание по строкам с положительным показателем преобладания, не зависящим от ε, N, в соответствии с [3, гл. 3] получаем, что $\|Q\|_{L_\infty[0,1] \to L_\infty[0,1]} \le C_1$. Пусть $P(x) \in S(\overline{\Omega}, 0, 1)$ — сплайн нулевой степени, интерполирующий $\Phi''(x)$ в узлах сетки Ω. Из оценки (1.1) и оценки погрешности интерполяции кусочно постоянной функцией следует, что

$$\|g_2''(x, \Phi) - \Phi''(x)\|_{L_\infty[0,1]}$$
$$\le (1 + \|Q\|_{L_\infty[0,1] \to L_\infty[0,1]}) \|P(x) - \Phi''(x)\|_{L_\infty[0,1]} \le (1 + C_1) \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \frac{\ln N}{N},$$

что доказывает лемму.

4. Доказательство теорем

Доказательство теорем 1, 2. Вначале докажем оценки (2.5) для $n \le \frac{N}{2} - 1$. Используем обозначения $e(x) = g_2(x, \Phi) - \Phi(x)$, $g_2(x) = g_2(x, \Phi)$. Зафиксируем $n \in \left[0, \frac{N}{2} - 1\right]$. Поскольку

$$e(x_n) = e(x_{n+1}) = 0, \tag{4.1}$$

рассматривая $e(x)$ как решение краевой задачи $e''(x) = e''(x)$ с условиями (4.1) на интервале $[x_n, x_{n+1}]$, получаем, что

$$e(x) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} G(x, s) e''(s)\, ds, \tag{4.2}$$

где

$$G(x,s)=\frac{1}{x_{n+1}-x_n}\begin{cases}(x-x_n)(x_{n+1}-s), & x_n\le x\le s,\\ (s-x_n)(x_{n+1}-x), & s<x\le x_{n+1},\end{cases} \tag{4.3}$$

— функция Грина. Так как $|G(x,s)|\le x_{n+1}-x_n=h$, из (4.2) следует, что

$$|e(x)|\le h\int\limits_{x_n}^{x_{n+1}}|e''(s)|\,ds\le h^2\|e''(s)\|_{C[0,1]}, \tag{4.4}$$

Поскольку $h=O(\varepsilon\ln(N)/N)$, из (4.4), (3.38) получаем оценку (2.5) и утверждение теоремы 1 для $n\le\frac{N}{2}-1$.

Замечание 1. Оценки (2.5) при $n\in\left[0,\frac{N}{2}-1\right]$ доказаны при любых соотношениях между ε и N.

Докажем теорему 1 и оценки (2.5) при $n\ge N/2$. Пусть $N^{-1}\le C\varepsilon$. В силу (4.2) и леммы 7 имеем

$$\|e(x)\|_{C[x_n,x_{n+1}]}=\left\|\int\limits_{x_n}^{x_{n+1}}G(x,s)e''(s)\,ds\right\|_{C[x_n,x_{n+1}]}\le\frac{C}{N}\int\limits_{x_n}^{x_{n+1}}|e''(s)|\,ds$$
$$\le\frac{C}{N^2}\|e''(s)\|_{L_\infty[x_n,x_{n+1}]}\le\frac{C_1}{N^2}\|\Phi''(s)\|_{C[x_n,x_{n+1}]}\le\frac{C_1}{N^2}\|\Phi''(s)\|_{C[x_{N/2},x_{N/2+1}]}$$
$$\le\frac{C_1}{N^2}\cdot\frac{1}{\varepsilon^2N^3}\le\frac{C_2}{N^3}.$$

Отсюда с учетом замечания 1 следует утверждение теоремы 1.

Пусть $\varepsilon\le CN^{-1}$. Тогда аналогично

$$\|e(x)\|_{C[x_n,x_{n+1}]}\le\frac{C}{N}\int\limits_{x_n}^{x_{n+1}}|e''(s)|\,ds\le\frac{C}{N}\left(\int\limits_{x_n}^{x_{n+1}}|\Phi''(s)|\,ds+\int\limits_{x_n}^{x_{n+1}}|g_2''(s)|\,ds\right). \tag{4.5}$$

Далее,

$$\int\limits_{x_n}^{x_{n+1}}|\Phi''(s)|\,ds\le\frac{C}{\varepsilon^2}\int\limits_{x_n}^{x_{n+1}}e^{-\frac{s}{\varepsilon}}\,ds\le\frac{C}{\varepsilon}e^{-\frac{x_n}{\varepsilon}}=\frac{C}{\varepsilon}e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}}e^{-\frac{x_n-x_{N/2}}{\varepsilon}}$$
$$\le\frac{C_1}{\varepsilon}N^{-3}e^{-(n-N/2)\frac{H}{\varepsilon}}\le\frac{C_1}{\varepsilon}N^{-3}e^{-\beta(n-N/2)}. \tag{4.6}$$

Учитывая (3.37), получаем

$$\int\limits_{x_n}^{x_{n+1}}|g_2''(s)|\,ds\le CN^{-1}\frac{1}{\varepsilon H}e^{-x_{N/2}/\varepsilon}e^{-\beta|n-\frac{N}{2}|}\le\frac{C}{\varepsilon}N^{-3}e^{-\beta|n-\frac{N}{2}|}. \tag{4.7}$$

Из (4.5)–(4.7) вытекает оценка (2.5) при $N/2\le n\le N-1$. Теоремы 1, 2 доказаны полностью.

Доказательство теоремы 3. Пусть $\Phi(x)=e^{-x/\varepsilon}$. Докажем оценку (2.6) при $n=N/2$. Для этого заметим, что в силу (3.37) и того, что $e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}}=N^{-3}$, имеет место оценка

$$\|g_2''(x)\|_{L_\infty[x_{N/2},x_{N/2+1}]}\ge\frac{C}{N^2\varepsilon}. \tag{4.8}$$

Оценим снизу $e(x)$ на интервале $[x_{\frac{N}{2}}, x_{\frac{N}{2}+1}]$. Ввиду (4.2) при $n = \frac{N}{2}$

$$\|e(x)\|_{C[x_{N/2},x_{N/2+1}]} \geq \left\| \int\limits_{x_{N/2}}^{x_{N/2+1}} G(x,s) g_2''(s)\,ds \right\|_{C[x_{N/2},x_{N/2+1}]} - \left\| \int\limits_{x_{N/2}}^{x_{N/2+1}} G(x,s)\Phi''(s)\,ds \right\|_{C[x_{N/2},x_{N/2+1}]}. \quad (4.9)$$

Далее, в силу (4.3) при любом $x \in [x_{N/2}, x_{N/2+1}]$

$$\left| \int\limits_{x_{N/2}}^{x_{N/2+1}} G(x,s)\Phi''(s)\,ds \right| \leq \frac{C}{H} \int\limits_{x_{N/2}}^{x_{N/2+1}} (x_{N/2+1} - x)(s - x_{N/2}) \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-\frac{s}{\varepsilon}}\,ds$$

$$\leq e^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}} \frac{C}{\varepsilon} \int\limits_{x_{N/2}}^{x_{N/2+1}} \frac{s - x_{N/2}}{\varepsilon} e^{-\frac{s - x_{N/2}}{\varepsilon}}\,ds \leq Ce^{-\frac{x_{N/2}}{\varepsilon}} \leq CN^{-3},$$

откуда получаем оценку

$$\left\| \int\limits_{x_{N/2}}^{x_{N/2+1}} G(x,s)\Phi''(s)\,ds \right\|_{C[x_{N/2},x_{N/2+1}]} \leq CN^{-3}. \quad (4.10)$$

Докажем существование такой константы $C_1 > 0$, что

$$\left\| \int\limits_{x_{N/2}}^{x_{N/2+1}} G(x,s) g_2''(s)\,ds \right\|_{C[x_{N/2},x_{N/2+1}]} \geq C_1 \frac{N^{-4}}{\varepsilon}. \quad (4.11)$$

Сделаем замену переменной $\frac{s - x_{N/2}}{H} = \tau$ и обозначим $v(\tau) = \varepsilon N^2 g_2''(x_{N/2} + \tau H)$. Тогда оценка (4.11) эквивалентна тому, что

$$\left\| \int\limits_0^1 \widetilde{G}(x,s) v(s)\,ds \right\|_{C[0,1]} \geq C_2 > 0, \quad (4.12)$$

где $\widetilde{G}(x,s)$ — функция Грина (4.3) при $x_n = 0$, $x_{n+1} = 1$, $v(\tau)$ — двузвенная кусочно постоянная на $[0,1]$ функция с разрывом в точке $\tau = 1/2$, причем в силу (4.8) $\|v(\tau)\|_{L_\infty[0,1]} \geq C > 0$.

Докажем (4.12). Предположим противное. Тогда существуют последовательности констант $C_j \to 0$ и кусочно постоянных двузвенных функций $v_j(\tau)$ с условием $\|v_j(\tau)\|_{L_\infty[0,1]} = 1$ таких, что при $j \to \infty$

$$\left\| \int\limits_0^1 \widetilde{G}(\tau,s) v_j(s)\,ds \right\|_{C[0,1]} \leq C_j \to 0.$$

Таблица. Погрешность параболического сплайна на кусочно равномерной сетке (1.3)

	N					
ε	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9
1	$9.38 \cdot 10^{-6}$	$1.18 \cdot 10^{-6}$	$1.47 \cdot 10^{-7}$	$1.84 \cdot 10^{-8}$	$2.31 \cdot 10^{-9}$	$2.89 \cdot 10^{-10}$
10^{-1}	$1.44 \cdot 10^{-3}$	$2.50 \cdot 10^{-4}$	$3.64 \cdot 10^{-5}$	$4.90 \cdot 10^{-6}$	$6.35 \cdot 10^{-7}$	$8.09 \cdot 10^{-8}$
10^{-2}	$4.37 \cdot 10^{-3}$	$1.58 \cdot 10^{-3}$	$4.49 \cdot 10^{-4}$	$1.04 \cdot 10^{-4}$	$2.15 \cdot 10^{-5}$	$4.03 \cdot 10^{-6}$
10^{-3}	$7.05 \cdot 10^{-3}$	$1.58 \cdot 10^{-3}$	$4.49 \cdot 10^{-4}$	$1.04 \cdot 10^{-4}$	$2.15 \cdot 10^{-5}$	$4.03 \cdot 10^{-6}$
10^{-4}	$7.32 \cdot 10^{-2}$	$4.08 \cdot 10^{-3}$	$4.49 \cdot 10^{-4}$	$1.04 \cdot 10^{-4}$	$2.15 \cdot 10^{-5}$	$4.03 \cdot 10^{-6}$
10^{-5}	$7.35 \cdot 10^{-1}$	$4.11 \cdot 10^{-2}$	$2.36 \cdot 10^{-3}$	$1.39 \cdot 10^{-4}$	$2.15 \cdot 10^{-5}$	$4.03 \cdot 10^{-6}$
10^{-6}	7.35	$4.11 \cdot 10^{-1}$	$2.37 \cdot 10^{-2}$	$1.40 \cdot 10^{-3}$	$8.46 \cdot 10^{-5}$	$5.18 \cdot 10^{-6}$
10^{-7}	73.5	4.11	$2.37 \cdot 10^{-1}$	$1.40 \cdot 10^{-2}$	$8.46 \cdot 10^{-4}$	$5.19 \cdot 10^{-5}$
10^{-8}	735	41.1	2.37	$1.40 \cdot 10^{-1}$	$8.46 \cdot 10^{-3}$	$5.19 \cdot 10^{-4}$

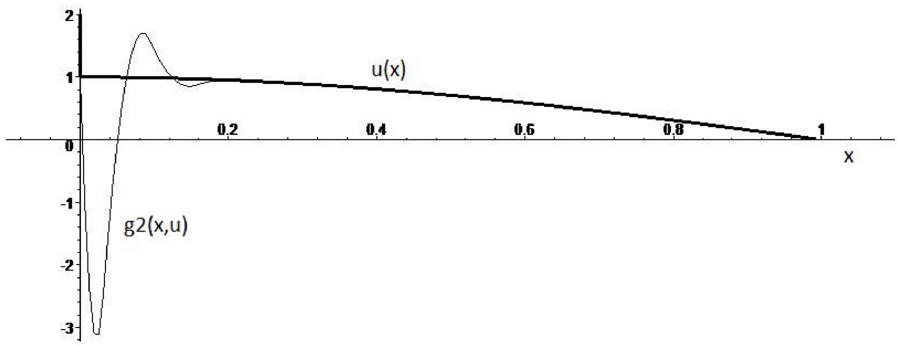

Рис. 1. Графики $u(x)$ и $g_2(x,u)$ при $\varepsilon = 10^{-7}$, $N = 32$, сетка Шишкина

Из последовательности таких функций можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Переходя к пределу, получим, что для некоторой функции $v(\tau)$ такой, что $\|v(\tau)\|_{L_\infty[0,1]} = 1$, будет

$$\int_0^1 \widetilde{G}(\tau, s)v(s)\,ds \equiv 0.$$

Функция в левой части последнего тождества есть решение задачи $y'' = v$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$, которое не может быть тождественно нулевым при $v \not\equiv 0$. Полученное противоречие доказывает (4.12).

Из (4.9)–(4.11) получаем, что найдется такая не зависящая от ε, N константа C, что при $\varepsilon \le CN^{-1}$ справедлива оценка

$$\|e(x)\|_{C[x_{N/2}, x_{N/2+1}]} \ge C_1 \frac{N^{-4}}{\varepsilon},$$

откуда следует оценка (2.6) для $n = N/2$. Доказательство для остальных n с учетом леммы 7 совершенно аналогично. $\square$

5. Результаты численных экспериментов

Зададим функцию вида (1.1)

$$u(x) = \cos\frac{\pi x}{2} + e^{-\frac{x}{\varepsilon}}, \quad x \in [0, 1].$$

Результаты расчетов сведены в табл. 1. В ней приведены максимальные погрешности сплайновой интерполяции на сетке Шишкина (1.3), вычисленные в узлах сгущенной сетки, получающейся из исходной расчетной сетки разбиением каждого ее сеточного интервала на 10 равных частей. Из таблицы видно, что погрешность возрастает при уменьшении ε для фиксированного N. На рис. 1 приведены графики функции $u(x)$ и сплайна $g_2(x, u)$ на сетке (1.3), иллюстрирующие отсутствие равномерной сходимости интерполяционного процесса при малых значениях ε, что соответствует теореме 3.

Отметим, что применение параболического сплайна на равномерной сетке при малых значениях ε приводит к значительным погрешностям. Например, при $\varepsilon = 10^{-8}$ и $N = 2^9$ погрешность интерполяции порядка $O(10^4)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ahlberg J. H., Nilson E. N., Walsh J. L.* The theory of splines and their applications. New York: Acad. Press, 1967.
2. *Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.* Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976.
3. *Бор К. Де.* Практическое руководство по сплайнам. М.: Радио и связь, 1985.
4. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.
5. *Бахвалов Н. С.* К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1969. Т. 9, № 4. С. 841–890.
6. *Шишкин Г. И.* Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. Екатеринбург: УрО РАН, 1992.
7. *Задорин А. И.* Метод интерполяции для задачи с пограничным слоем // Сиб. журн. вычисл. математики. 2007. Т. 10, № 3. С. 267–275.
8. *Задорин А. И.* Интерполяция Лагранжа и формулы Ньютона — Котеса для функций с погранслойной составляющей на кусочно равномерных сетках // Сиб. журн. вычисл. математики. 2015. Т. 18, № 3. С. 289–303.
9. *Zadorin A. I.* Spline interpolation of functions with a boundary layer component // Intern. J. Numer. Anal. Model. Ser. B. 2011. V. 2, N 2–3. P. 262–279.
10. *Волков Ю. С.* Интерполяция сплайнами четной степени по Субботину и по Марсдену // Укр. мат. журн. 2014. Т. 66, № 7. С. 891–908.
11. *Зматраков Н. Л.* Сходимость интерполяционного процесса для параболических и кубических сплайнов // Тр. МИАН. 1975. Т. 138. С. 71–93.
12. *Зматраков Н. Л.* Необходимое условие сходимости интерполяционных параболических и кубических сплайнов // Мат. заметки. 1976. Т. 19, № 2. С. 165–178.
13. *Linss T.* The necessity of Shishkin decompositions // Appl. Math. Let. 2001. V. 14, N 7. P. 891–896.
14. *Miller J. J. H., O'Riordan E., Shishkin G. I.* Fitted numerical methods for singular perturbation problems: Error estimates in the maximum norm for linear problems in one and two dimensions (revised ed.). Singapore: World Sci., 2012.
15. *Demko S.* Inverses of band matrices and local convergence of spline projections // SIAM J. Numer. Anal. 1977. V. 14, N 4. P. 616–619.
16. *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.
17. *Самарский А. А., Николаев В. С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.

18. *Блатов И. А.* О методах неполной факторизации для систем с разреженными матрицами // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1993. Т. 33, № 6. С. 819–836.

Статья поступила 5 июля 2016 г.

Блатов Игорь Анатольевич
Поволжский гос. университет телекоммуникаций и информатики,
Московское шоссе, 77, Самара 443090
blatow@mail.ru

Задорин Александр Иванович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Омский филиал, ул. Певцова, 13, Омск 644099
zadorin@ofim.oscsbras.ru

Китаева Елена Викторовна
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С. П. Королева,
Московское шоссе, 34, Самара 443086
el_kitaeva@mail.ru