S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 10, стр. 491–503 (2013) УДК 519.644
MSC 65D32,65L50

КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА ДЛЯ ФУНКЦИИ С ПОГРАНСЛОЙНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ НА КУСОЧНО-РАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ

А.И. ЗАДОРИН, Н.А. ЗАДОРИН

Abstract. Euler and Gregory quadrature rules for a function with a boundary layer component are investigated. The integrand corresponds to a solution of a singular perturbed problem. It is proved that Euler and Gregory quadrature rules on a mesh, dence in a boundary layer, have a fourth order of an accuracy uniformly in a boundary layer growth of the integrand. Results of numerical experiments are discussed.

Keywords: function, boundary layer, Euler quadrature formula, piecewise uniform mesh, uniform accuracy.

1. Введение

Построение квадратурных формул Ньютона-Котеса основано на приближении интегрируемой функции многочленом Лагранжа. Погрешность таких составных квадратурных формул, как известно, в случае больших градиентов интегрируемой функции и равномерной сетки, может быть значительной. Вопрос построения квадратурных формул для функций с особенностями исследовался в ряде работ, например, в [1], [2].

В [3], [4] исследовался вопрос построения формул сплайн-интерполяции для функций с погранслойной составляющей. Показано, что применение многочленов Лагранжа к функциям, имеющим большие градиенты в пограничном слое, в случае равномерной сетки, приводит к погрешностям порядка $O(1)$. Это приводит к понижению точности квадратурных формул, основанных на

Zadorin A.I., Zadorin N.A. Euler quadrature rule for a function with a boundary layer component on a picewise uniform mesh.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 11-01-00875, 13-01-00618) и ОМН РАН (проект 1.3.2, 2012).

Поступила 10 июня 2013 г., опубликована 1 августа 2013 г.

использовании многочленов Лагранжа. В [3], [4] предложено строить формулы сплайн-интерполяции, точные на погранслойной составляющей. Доказано, что погрешность интерполяции таких формул равномерна по погранслойным изменениям интерполируемой функции. В [5] на основе разработанных формул интерполяции построены аналоги формул трапеций и Симпсона, точные на погранслойной составляющей. Доказано, что погрешность построенных формул не зависит от погранслойной составляющей и ее производных.

Для обеспечения равномерной точности квадратурных формул можно использовать сгущение сетки в пограничном слое. Такой подход применен в [6], где обоснована равномерная по малому параметру точность составных формул трапеций и Симпсона на сетке Шишкина [7].

Известно, что применение квадратурной формулы Эйлера, учитывающей значения производной интегрируемой функции на концах интервала, приводит к повышению точности составной формулы трапеций [2]. Представляет интерес анализ точности этой формулы в случае, когда интегрируемая функция имеет большие градиенты в области пограничного слоя. В данной работе исследуем точность квадратурной формулы Эйлера для численного интегрирования функций с погранслойной составляющей на кусочно-равномерных сетках, достаточно мелких в пограничном слое.

Итак, будем строить квадратурную формулу для вычисления интеграла:

$$I(u) = \int\limits_0^1 u(x)\,dx. \tag{1.1}$$

Предполагаем, что $u(x) \in C^4[0,1]$, и имеют место оценки производных:

$$|u^{(j)}(x)| \le C_0\Big[1 + \frac{1}{\varepsilon^j} e^{-\alpha x/\varepsilon}\Big],\ 0 \le j \le 4. \tag{1.2}$$

где $\alpha > 0,\ \varepsilon \in (0,1]$. Будем подразумевать, что постоянные C и C_j не зависят от параметра ε и числа узлов сетки.

Оценки производных (1.2) имеют место, если функция $u(x)$ является решением сингулярно возмущенной краевой задачи [7] - [9]:

$$\varepsilon u''(x) + a_1(x)u'(x) - a_2(x)u(x) = f(x), \quad u(0) = A,\ u(1) = B, \tag{1.3}$$

где

$$a_1(x) \ge \alpha > 0,\ a_2(x) \ge 0,\ \varepsilon > 0,$$

функции a_1, a_2, f достаточно гладкие. В соответствии с оценкой (1.2) при малых значениях параметра ε функция $u(x)$ имеет экспоненциальный погранслойный рост у границы $x = 0$.

2. Квадратурная формула Эйлера на неравномерной сетке

Квадратурная формула Эйлера с двумя узлами для вычисления интеграла вида (1.1) на интервале $[a, b]$ имеет вид ([2], с. 138):

$$S_E(u) = \frac{b-a}{2}(u(a) + u(b)) + \frac{1}{12}(b-a)^2(u'(a) - u'(b)). \tag{2.1}$$

В соответствии с [2] для погрешности формулы (2.1) справедливо представление:

$$I(u) - S_E(u) = \frac{1}{720}(b-a)^5 u^{(4)}(s),\ \exists s \in (a,b). \tag{2.2}$$

Если на основе (2.1) построить составную квадратурную формулу, то эта формула будет четвертого порядка точности по шагу сетки, если производная $u^{(4)}(x)$ равномерно ограничена. В соответствии с ограничениями (1.2) эта производная может быть не ограничена, если параметр ε близок к нулю, что может привести к значительным погрешностям квадратурной формулы Эйлера.

Остановимся на примере. Пусть $[a,b]=[0,1]$ и $u(x)=e^{-x/\varepsilon}$, $\varepsilon\in(0,1]$. Выпишем погрешность формулы (2.1) на сеточном интервале длины h:

$$\Delta=\int\limits_0^h e^{-x/\varepsilon}\,dx-\frac{h}{2}(1+e^{-h/\varepsilon})+\frac{h^2}{12\varepsilon}(1-e^{-h/\varepsilon}).$$

Следовательно, $\Delta=O(h^5)$ при $\varepsilon=1$, однако при $\varepsilon\ll h$

$$\Delta\approx-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{12\varepsilon}.$$

Погрешность формулы Эйлера значительна при значениях ε, близких к нулю.

Для повышения точности формулы Эйлера при ограничениях (1.2) на производные интегрируемой функции, используем сгущение сетки в пограничном слое. Используем кусочно-равномерные сетки, сгущающиеся в пограничном слое.

Пусть интервал $[0,1]$ разбит на N сеточных интервалов, причем половина сеточных интервалов с мелким шагом h находится в пограничном слое $[0,\sigma]$ и половина, с крупным шагом H — на интервале $[\sigma,1]$.

Итак, зададим сетку Ω с узлами $x_n,\ n=0,1,\ldots,N$ и шагами

$$h_n=h=\frac{2\sigma}{N},\ n=1,\ldots,\frac{N}{2},\quad h_n=H=\frac{2(1-\sigma)}{N},\ n=\frac{N}{2}+1,\ldots,N. \tag{2.3}$$

Сетки вида (2.3) с определенными значениями параметра σ были предложены Г.И. Шишкиным [7] для численного решения сингулярно возмущенных задач.

Зададим

$$\sigma=\min\Big\{\frac{1}{2},-\frac{4\varepsilon}{\alpha}\ln\varepsilon\Big\},\ 0<\varepsilon<1. \tag{2.4}$$

Запишем формулу (2.1) для произвольного сеточного интервала $[x_{n-1},x_n]$:

$$S_n(u)=\frac{h_n}{2}(u_{n-1}+u_n)+\frac{h_n^2}{12}(u'_{n-1}-u'_n). \tag{2.5}$$

С учетом формулы (2.5) выпишем составную квадратурную формулу на сетке (2.3) для вычисления интеграла (1.1):

$$S(u)=h\Big(\frac{u_0+u_{N/2}}{2}+u_1+\cdots+u_{N/2-1}\Big)+H\Big(\frac{u_{N/2}+u_N}{2}+u_{N/2+1}+\cdots+u_{N-1}\Big)+$$
$$+\frac{h^2}{12}u'_0-\frac{H^2}{12}u'_N+\frac{H^2-h^2}{12}u'_{N/2}. \tag{2.6}$$

Лемма 1. *Пусть для функции $u(x)$ выполнены оценки (1.2). Тогда для квадратурной формулы (2.6) на сетке (2.3),(2.4) справедлива оценка погрешности:*

$$|I(u)-S(u)|\le\frac{C}{N^4}, \tag{2.7}$$

где C – некоторая постоянная.

Доказательство. Отдельно рассмотрим случаи равномерной и неравномерной сетки.

Остановимся на случае, когда в (2.4) $\sigma = -4\alpha^{-1}\varepsilon\ln\varepsilon$. Тогда $-\varepsilon\ln\varepsilon \le \alpha/8$. Оценим погрешность квадратурной формулы (2.5) на произвольном сеточном интервале $[x_{n-1}, x_n]$. Пусть

$$I_n(u) = \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} u(x)\,dx.$$

В соответствии с (2.2) справедлива оценка:

$$|I_n(u) - S_n(u)| \le \frac{h_n^5}{720}\max|u^{(4)}(x)|,\ x \in [x_{n-1}, x_n]. \tag{2.8}$$

Оценим погрешность составной формулы для вычисления интеграла в пограничном слое:

$$\Delta_1 = \Big|h\Big(\frac{u_0 + u_{N/2}}{2} + u_1 + \cdots + u_{N/2-1}\Big) + \frac{h^2}{12}(u_0' - u_{N/2}') - \int\limits_0^\sigma u(x)\,dx\Big|.$$

Пусть $n \le N/2$. Учитывая (1.2) в (2.8), получим:

$$|I_n(u) - S_n(u)| \le \frac{C_0 h^5}{720}\Big(1 + \frac{1}{\varepsilon^4}e^{-\alpha\varepsilon^{-1}x_{n-1}}\Big). \tag{2.9}$$

Суммируя погрешности сеточных интервалов с учетом (2.9), получим:

$$\Delta_1 < \frac{C_0 h^4\sigma}{720}\Big(1 + \frac{1}{\varepsilon^4}\Big).$$

Следовательно,

$$\Delta_1 \le \frac{C_0\sigma^5}{45N^4}\Big(1 + \frac{1}{\varepsilon^4}\Big). \tag{2.10}$$

Подставляя в (2.10) значение $\sigma = 4\alpha^{-1}\varepsilon|\ln\varepsilon|$, получим:

$$\Delta_1 \le \frac{1024}{45}\cdot\frac{C_0}{\alpha^5 N^4}\Big(|\varepsilon\ln\varepsilon|^5 + |\varepsilon\ln^5\varepsilon|\Big). \tag{2.11}$$

Учитывая, что $|\varepsilon\ln\varepsilon| \le \alpha/8$, из (2.11) получим:

$$\Delta_1 < \frac{C_0}{1440N^4} + \frac{1024}{45}\cdot\frac{C_0}{\alpha^5 N^4}|\varepsilon\ln^5\varepsilon|. \tag{2.12}$$

Теперь оценим погрешность нахождения интеграла по формуле Эйлера вне пограничного слоя:

$$\Delta_2 = \Big|H\Big(\frac{u_{N/2} + u_N}{2} + u_{N/2+1} + \cdots + u_{N-1}\Big) + \frac{H^2}{12}(u_{N/2}' - u_N') - \int\limits_\sigma^1 u(x)\,dx\Big|.$$

В соответствии с (1.2), (2.8), если $n > N/2$, то

$$|I_n(u) - S_n(u)| \le \frac{C_0 H^5}{360},$$

поэтому $\Delta_2 < C_0 H^4/360$. Следовательно,

$$\Delta_2 < \frac{2C_0}{45N^4}. \tag{2.13}$$

Учитывая (2.12), (2.13), получим оценку

$$|I(u) - S(u)| < \frac{13C_0}{288N^4} + \frac{1024}{45}\cdot\frac{C_0}{\alpha^5 N^4}|\varepsilon\ln^5\varepsilon| \tag{2.14}$$

Итак, в случае $-\varepsilon\ln\varepsilon \le \alpha/8$ получили оценку погрешности (2.14) формулы Эйлера (2.6). Заметим, что при малых значениях ε оценка (2.14) перестает зависеть от ε, так как $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \varepsilon\ln^5\varepsilon = 0$. В этом случае в (2.7) $C \approx 13C_0/288$.

Учитывая, что $|\varepsilon\ln^5\varepsilon| \le (5/e)^5$, из (2.14) получим оценку (2.7) с постоянной

$$C = \frac{13C_0}{288} + \frac{480C_0}{\alpha^5}.$$

Остается рассмотреть случай равномерной сетки, когда в (2.4) $\sigma = 1/2$. Учитывая (1.2), (2.8), для $n = 1, 2, \ldots, N$ получим

$$|I_n(u) - S_n(u)| \le \frac{C_0}{720N^5}\Big(1 + \frac{1}{\varepsilon^4}e^{-\alpha\varepsilon^{-1}x_{n-1}}\Big).$$

Следовательно,

$$|I(u) - S(u)| \le \frac{C_0}{720N^4} + \frac{C_0}{720N^5\varepsilon^4}\sum_{n=1}^{N} e^{-\alpha\varepsilon^{-1}x_{n-1}}.$$

Оценивая сверху сумму прогрессии, получим

$$|I(u) - S(u)| < \frac{C_0}{720N^4} + \frac{C_0}{720N^5\varepsilon^4}\cdot\frac{1 - e^{-\alpha\varepsilon^{-1}}}{1 - e^{-\alpha\varepsilon^{-1}h}}. \tag{2.15}$$

Очевидно, что

$$0 < \frac{1 - e^{-\alpha\varepsilon^{-1}}}{1 - e^{-\alpha\varepsilon^{-1}h}} < N. \tag{2.16}$$

Теперь получим оценку погрешности, равномерную по параметру ε.

В случае $\varepsilon \ge e^{-1}$ из (2.15), (2.16) получим:

$$|I(u) - S(u)| < \frac{C_0}{720N^4}(1 + e^4),$$

откуда следует (2.7).

Пусть теперь $\varepsilon \le e^{-1}$. Для того, чтобы воспользоваться оценкой (2.15), необходимо ε оценить снизу. В соответствии с (2.4) и условием $\sigma = 1/2$ выполнится:

$$-\varepsilon\ln\varepsilon \ge \frac{\alpha}{8}. \tag{2.17}$$

Используем (2.17), учитывая что при $\varepsilon \in (0, e^{-1}]$ функция $g_1(\varepsilon) = -\varepsilon\ln\varepsilon$ возрастает. Пусть $\varepsilon = e^{-r},\ r \ge 1$. Тогда неравенство (2.17) принимает вид: $re^{-r} \ge \alpha/8$. Функция $g_2(r) = re^{-r}$ убывает при $r \ge 1$, поэтому решением неравенства (2.17) является $\varepsilon \ge \varepsilon_0, \varepsilon_0 = e^{-r_0}$, где

$$r_0 = \max\{r : re^{-r} \ge \alpha/8\}. \tag{2.18}$$

Используя соотношение (2.18), можно оценить r_0 сверху. Получим оценку r_0, учитывая, что

$$re^{-r} = 2(r/2)e^{-r/2}e^{-r/2} < 2e^{-1}e^{-r/2}.$$

Выполняя неравенство $2e^{-1}e^{-r/2} \ge \alpha/8$, получим $r < 2\ln(16/(\alpha e))$. Следовательно, $r_0 < r$, неравенство (2.17) выполнится, если

$$\varepsilon > \frac{\alpha^2e^2}{256}. \tag{2.19}$$

В случае $\alpha = 1$ из (2.19) получаем $\varepsilon > 0.0289$, а решение неравенства (2.17) дает $\varepsilon > 0.0387$. Оценка (2.19) может быть улучшена, если более точно оценить r_0.

Учитывая (2.16) и (2.19) в (2.15), получим:

$$|I(u) - S(u)| < \frac{C_0}{720N^4} + \frac{(16/(\alpha e))^8 C_0}{720N^4}. \tag{2.20}$$

Из (2.20) следует оценка (2.7) при задании

$$C = C_0\Big[\frac{1}{720} + \frac{2003}{\alpha^8}\Big].$$

Заметим, что при $\varepsilon \le h$

$$\frac{1 - e^{-\alpha\varepsilon^{-1}}}{1 - e^{-\alpha\varepsilon^{-1}h}} < \frac{1}{1 - e^{-\alpha}}. \tag{2.21}$$

Учитывая в (2.15) соотношение (2.21), постоянную C в оценке (2.7) можно уменьшить. Лемма доказана.

3. Формула Грегори

Формула (2.6) использует значение производной интегрируемой функции. В формулах Грегори [2] эти производные заменяются разностными соотношениями. Используем односторонние разности:

$$u'_n = \frac{-3u_n + 4u_{n+1} - u_{n+2}}{2h} + \frac{h^2}{3}u'''(s_1), \;\; u'_n = \frac{3u_n - 4u_{n-1} + u_{n-2}}{2h} + \frac{h^2}{3}u'''(s_2), \tag{3.1}$$

где $s_1 \in (x_n, x_{n+2}),\;\; s_2 \in (x_{n-2}, x_n)$. Тогда от формулы Эйлера (2.6) перейдем к формуле Грегори:

$$S^1_G(u) = h\Big(\frac{u_0 + u_{N/2}}{2} + u_1 + \cdots + u_{N/2-1}\Big) + H\Big(\frac{u_{N/2} + u_N}{2} + u_{N/2+1} + \cdots + u_{N-1}\Big) +$$
$$+ \frac{h}{24}(-3u_0 + 4u_1 - u_2) - \frac{H}{24}(3u_N - 4u_{N-1} + u_{N-2}) +$$
$$+ \frac{H^2 - h^2}{24H}(-3u_{N/2} + 4u_{N/2+1} - u_{N/2+2}). \tag{3.2}$$

Если формулу (3.2) расписать по узлам сетки, то можно убедиться, что все коэффициенты формулы положительны и их сумма равняется единице. Поэтому квадратурная формула (3.2) устойчива к возмущению интегрируемой функции.

Лемма 2. *Пусть для функции $u(x)$ выполнены оценки (1.2). Тогда для квадратурной формулы (3.2) на сетке (2.3),(2.4) для некоторой постоянной C_1 справедлива оценка погрешности:*

$$|I(u) - S^1_G(u)| \le \frac{C_1}{N^4}. \tag{3.3}$$

Доказательство. Воспользуемся соотношением:

$$|I(u) - S^1_G(u)| \le |I(u) - S(u)| + |S(u) - S^1_G(u)|. \tag{3.4}$$

Для первого модуля в правой части оценки (3.4) справедлива оценка (2.7), остается оценить второй модуль. Имеем:

$$S_G^1(u) - S(u) = \frac{h^2}{12}\Big(\frac{-3u_0 + 4u_1 - u_2}{2h} - u_0'\Big) - \frac{H^2}{12}\Big(\frac{3u_N - 4u_{N-1} + u_{N-2}}{2h} - u_N'\Big) + \\ + \frac{H^2 - h^2}{12}\Big(\frac{-3u_{N/2} + 4u_{N/2+1} - u_{N/2+2}}{2H} - u_{N/2}'\Big). \qquad (3.5)$$

Пусть в (2.4) $\sigma = -4\alpha^{-1}\varepsilon \ln \varepsilon$. В соответствии с (3.1):

$$\Big|\frac{-3u_0 + 4u_1 - u_2}{2h} - u_0'\Big| \le \frac{h^2}{3}\max|u'''(s)|,\ s \in (x_0, x_2), \qquad (3.6)$$

$$\Big|\frac{3u_N - 4u_{N-1} + u_{N-2}}{2h} - u_N'\Big| \le \frac{H^2}{3}\max|u'''(s)|,\ s \in (x_{N-2}, x_N). \qquad (3.7)$$

Учитывая (1.2) в (3.6), получим:

$$\frac{h^2}{12}\Big|\frac{-3u_0 + 4u_1 - u_2}{2h} - u_0'\Big| \le \frac{C_0 h^4}{18\varepsilon^3} = C_0\frac{2048}{9}\cdot\frac{\varepsilon \ln^4 \varepsilon}{N^4} \le \frac{C_2}{N^4}. \qquad (3.8)$$

Учитывая (1.2) в (3.7), можно показать, что

$$\frac{H^2}{12}\Big|\frac{3u_N - 4u_{N-1} + u_{N-2}}{2h} - u_N'\Big| \le \frac{C_0 H^4}{18} < \frac{8C_0}{9N^4}. \qquad (3.9)$$

Аналогично оценивается последнее слагаемой в (3.5):

$$\frac{H^2 - h^2}{12}\Big|\frac{-3u_{N/2} + 4u_{N/2+1} - u_{N/2+2}}{2H} - u_{N/2}'\Big| < \frac{8C_0}{9N^4}. \qquad (3.10)$$

Учитывая (3.4), (3.5), (3.8)-(3.10), для некоторой постоянной C_1 получаем оценку (3.3).

Рассмотрим случай $\sigma = 1/2$. В этом случае сетка равномерна, $h = H = 1/N$. В соответствии с (1.2), (3.5)-(3.7)

$$|S_G^1(u) - S(u)| < \frac{C_0 h^4}{9\varepsilon^3}. \qquad (3.11)$$

Как было показано в лемме 1, при $\sigma = 1/2$ справедлива оценка $\varepsilon > (\alpha e/16)^2$. Тогда из (3.11) следует, что $|S_G^1(u) - S(u)| \le C_3/N^4$ для некоторой постоянной C_3. Из (3.4) получаем утверждение леммы.

Теперь производные в формуле Эйлера (2.6) аппроксимируем более точно. На интервале $[x_{n-1}, x_{n+2}]$ с постоянным шагом h (случай шага H аналогичен) зададим аналог первой производной третьего порядка точности по h:

$$u'(x) \approx \frac{u_n - u_{n-1}}{h} + \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{2h^2}(2x - x_{n-1} - x_n) + \\ + \frac{u_{n+2} - 3u_{n+1} + 3u_n - u_{n-1}}{6h^3}\Big[3(x_n - x)^2 - h^2\Big],\ x \in [x_{n-1}, x_{n+2}]. \qquad (3.12)$$

Из (3.12) следует:

$$u_{n-1}' \approx \frac{-11u_{n-1} + 18u_n - 9u_{n+1} + 2u_{n+2}}{6h}, \qquad (3.13)$$

$$u_{n+2}' \approx \frac{11u_{n+2} - 18u_{n+1} + 9u_n - 2u_{n-1}}{6h}. \qquad (3.14)$$

Для производных в формуле (2.6) используем правостороннюю разность (3.13) в узлах $x_0, x_{N/2}$ и левостороннюю разность (3.14) в узле x_N. Тогда придем к квадратурной формуле:

$$S_G^2(u) = h\Big(\frac{u_0+u_{N/2}}{2}+u_1+\dots+u_{N/2-1}\Big)+H\Big(\frac{u_{N/2}+u_N}{2}+u_{N/2+1}+\dots+u_{N-1}\Big)+$$
$$+\frac{h}{72}(-11u_0+18u_1-9u_2+2u_3)-\frac{H}{72}(11u_N-18u_{N-1}+9u_{N-2}-2u_{N-3})+$$
$$+\frac{H^2-h^2}{72H}(-11u_{N/2}+18u_{N/2+1}-9u_{N/2+2}+2u_{N/2+3}). \qquad (3.15)$$

По аналогии с леммой 2 можно показать, что для погрешности формулы (3.15) на сетке (2.3), (2.4) для некоторой постоянной C_2 справедлива оценка:

$$|I(u)-S_G^2(u)| \le \frac{C_2}{N^4}.$$

4. Численные эксперименты

Остановимся на вычислении интеграла:

$$I(u)=\int\limits_0^1 u(x)\,dx, \quad u(x)=cos\frac{\pi x}{2}+e^{-x/\varepsilon}, \quad \varepsilon\in(0,1]. \qquad (4.1)$$

Для интегрируемой функции справедливы оценки производных (1.2) при $\alpha = 1$. Всюду в таблицах под $e \pm m$ подразумеваем $10^{\pm m}$.

Формула Эйлера.

В табл. 1 приведены погрешность $\Delta_{N,\varepsilon} = |I(u) - S(u)|$ и ниже – вычисленный порядок точности $CR_{N,\varepsilon} = \log_2\Big(\Delta_{N,\varepsilon}/\Delta_{2N,\varepsilon}\Big)$ формулы Эйлера (2.6) на сетке (2.3)-(2.4) в зависимости от ε и N. Эксперименты показали, что при малых значениях N порядок точности выше третьего и становится четвертым с возрастанием N, что соответствует лемме 1.

В табл. 2 приведена погрешность $\Delta_{N,\varepsilon}$ вычисления интеграла (4.1) по формуле Эйлера (2.6) на равномерной сетке. Погрешность пропорциональна ε^{-1} и значительна при малых значениях ε.

Теперь приведем погрешность вычисления интеграла (4.1) на сетке Шишкина [7], когда в (2.3)

$$\sigma=\min\Big\{\frac{1}{2},\frac{4\varepsilon}{\alpha}\ln N\Big\}. \qquad (4.2)$$

В табл. 3 приведена погрешность $\Delta_{N,\varepsilon}$ вычисления интеграла (4.1) по формуле Эйлера (2.6) на сетке (2.3), (4.2). Погрешность возрастает с уменьшением ε, что особенно заметно при небольшом количестве узлов.

В табл. 4 приведена погрешность $\Delta_{N,\varepsilon}$ формулы (2.6) при задании в (2.3)

$$\sigma=\min\Big\{\frac{1}{2},\frac{2\varepsilon}{\alpha}\ln N\Big\}. \qquad (4.3)$$

При всех ε и N погрешность значительно выше, чем в случае сетки (2.3), (4.2).

Итак, наибольшую точность дает применение формулы Эйлера (2.6) на сетке (2.3)-(2.4), погрешность формулы порядка $O(N^{-4})$, что согласуется с леммой 1. Погрешность формулы (2.6) на равномерной сетке значительна при всех рассматриваемых значениях N и малых значениях ε. Погрешность формулы Эйлера (2.6) на сетке Шишкина (2.3),(4.2) растет при уменьшении ε, при этом точность формулы повышается с увеличением числа узлов сетки.

Таблица 1. Погрешность и порядок точности квадратурной формулы Эйлера на сетке (2.3)-(2.4)

ε	N					
	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8
10^{-1}	$3.28e-4$ 4.0	$2.11e-5$ 4.0	$1.33e-6$ 4.0	$8.31e-8$ 4.0	$5.19e-9$ 4.0	$3.25e-10$
10^{-2}	$4.19e-3$ 3.6	$3.47e-4$ 3.9	$2.37e-5$ 4.0	$1.51e-6$ 4.0	$9.52e-8$ 4.0	$5.96e-9$
10^{-3}	$1.53e-3$ 3.3	$1.55e-4$ 3.7	$1.16e-5$ 3.9	$7.63e-7$ 4.0	$4.83e-8$ 4.0	$3.03e-9$
10^{-4}	$3.67e-4$ 3.1	$4.31e-5$ 3.6	$3.55e-6$ 3.9	$2.42e-7$ 4.0	$1.54e-8$ 4.0	$9.71e-10$
10^{-5}	$8.39e-5$ 3.1	$9.96e-6$ 3.5	$8.79e-7$ 3.8	$6.19e-8$ 4.0	$4.00e-9$ 4.0	$2.52e-10$
10^{-6}	$3.11e-5$ 3.5	$2.83e-6$ 3.6	$2.37e-7$ 3.8	$1.67e-8$ 4.0	$1.08e-9$ 4.0	$6.81e-11$

Таблица 2. Погрешность формулы Эйлера на равномерной сетке

ε	N					
	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8
1	$1.53e-6$	$9.55e-8$	$5.97e-9$	$3.73e-10$	$2.33e-11$	$1.46e-12$
10^{-1}	$3.28e-4$	$2.11e-5$	$1.33e-6$	$8.31e-8$	$5.19e-9$	$3.25e-10$
10^{-2}	$7.77e-2$	$1.12e-2$	$1.08e-3$	$7.82e-5$	$5.10e-6$	$3.22e-7$
10^{-3}	1.24	$2.95e-1$	$6.68e-2$	$1.35e-2$	$2.18e-3$	$2.38e-4$
10^{-4}	$1.30e+1$	3.22	$7.98e-1$	$1.96e-1$	$4.71e-2$	$1.08e-2$
10^{-5}	$1.30e+2$	$3.25e+1$	8.12	2.03	$5.05e-1$	1.25 e -1
10^{-6}	$1.30e+3$	$3.25e+2$	$8.14e+1$	$2.03e+1$	5.08	1.27

Таблица 3. Погрешность формулы Эйлера на сетке (2.3), (4.2)

ε	N					
	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8
1	$1.53e-6$	$9.55e-8$	$5.97e-9$	$3.73e-10$	$2.33e-11$	$1.46e-12$
10^{-1}	$3.28e-4$	$2.11e-5$	$1.33e-6$	$8.30e-8$	$5.19e-9$	$3.25e-10$
10^{-2}	$3.30e-4$	$5.06e-5$	$7.73e-6$	$1.01e-6$	$1.17e-7$	$1.25e-8$
10^{-3}	$1.26e-3$	$2.46e-5$	$1.12e-6$	$1.09e-7$	$1.20e-8$	$1.27e-9$
10^{-4}	$1.27e-2$	$1.99e-4$	$3.22e-6$	$6.26e-8$	$2.21e-9$	$1.56e-10$
10^{-5}	$1.27e-1$	$1.99e-3$	$3.11e-5$	$4.90e-7$	$7.98e-9$	$1.50e-10$
10^{-6}	1.27	$1.99e-2$	$3.10e-4$	$4.85e-6$	$7.61e-8$	$1.20e-9$

Формула Грегори.

В табл. 5 приведены погрешность и порядок точности $CR_{N,\varepsilon}$ формулы Грегори (3.2) на сетке (2.3), (2.4). С ростом N при всех значениях ε порядок точности приближается к четвертому, что соответствует лемме 2.

В табл. 6 приведена погрешность формулы Грегори (3.2) на сетке (2.3), (4.2). При небольших N погрешность формулы (3.2) значительна и пропорциональна ε^{-1}, с возрастанием N погрешности формулы (3.2) на сетках (2.3)-(2.4) и (2.3),(4.2) выравниваются.

В табл. 7 приведена погрешность формулы Грегори (3.2) на равномерной сетке. При малях значениях ε подтверждается лишь первый порядок точности квадратурной формулы. Заметим, что погрешность формулы Грегори (3.2) в случае равномерной сетки значительно ниже погрешности формулы Эйлера на такой же сетке.

Таблица 4. Погрешность формулы Эйлера на сетке (2.3), (4.3)

ε	N					
	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8
1	$1.53e-6$	$9.55e-8$	$5.97e-9$	$3.73e-10$	$2.33e-11$	$1.46e-12$
10^{-1}	$1.66e-4$	$2.11e-5$	$1.33e-6$	$8.30e-8$	$5.19e-9$	$3.25e-10$
10^{-2}	$5.79e-3$	$2.66e-4$	$9.27e-6$	$2.58e-7$	$1.07e-8$	$8.42e-10$
10^{-3}	$7.88e-2$	$4.79e-3$	$2.84e-4$	$1.60e-5$	$8.08e-7$	$3.22e-8$
10^{-4}	$8.11e-1$	$5.05e-2$	$3.14e-3$	$1.94e-4$	$1.19e-5$	$7.16e-7$
10^{-5}	8.13	$5.08e-1$	$3.17e-2$	$1.98-3$	$1.24-4$	$7.70e-6$
10^{-6}	$8.14e+1$	5.08	$3.17e-1$	$1.99e-2$	$1.24e-3$	$7.75e-5$

Таблица 5. Погрешность и порядок точности формулы Грегори (3.2) на сетке (2.3)-(2.4)

ε	N					
	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8
10^{-1}	$2.63e-3$ 3.4	$2.53e-4$ 3.7	$1.99e-5$ 3.8	$1.40e-6$ 3.9	$9.28e-8$ 4.0	$5.98e-9$
10^{-2}	$7.98e-3$ 2.3	$1.58e-3$ 3.0	$2.01e-4$ 3.4	$1.88e-5$ 3.7	$1.45e-6$ 3.8	$1.01e-7$
10^{-3}	$1.94e-3$ 2.1	$4.48e-4$ 2.7	$7.14e-5$ 3.2	$7.82e-6$ 3.6	$6.64e-7$ 3.8	$4.88e-7$
10^{-4}	$6.17e-4$ 2.6	$1.02e-4$ 2.6	$1.72e-5$ 3.0	$2.10e-6$ 3.4	$1.93e-7$ 3.7	$1.49e-8$
10^{-5}	$4.09e-4$ 3.5	$3.64e-5$ 3.1	$4.33e-6$ 3.1	$5.02e-7$ 3.4	$4.73e-8$ 3.7	$3.73e-9$
10^{-6}	$3.81e-4$ 3.9	$2.62e-5$ 3.7	$1.98e-6$ 3.6	$1.67e-7$ 3.6	$1.38e-8$ 3.7	$1.04e-9$

Таблица 6. Погрешность формулы Грегори (3.2) на сетке (2.3), (4.2)

ε	N					
	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8
1	$2.40e-5$	$1.66e-6$	$1.09e-7$	$6.94e-9$	$4.39e-10$	$2.76e-11$
10^{-1}	$2.63e-3$	$2.53-4$	$1.99e-5$	$1.40e-6$	$9.28e-8$	$5.98e-9$
10^{-2}	$2.37e-3$	$3.79e-3$	$7.91e-5$	$1.30e-5$	$1.77e-6$	$2.08e-7$
10^{-3}	$1.10e-2$	$8.16e-4$	$9.17e-6$	$1.39e-6$	$1.82e-7$	$2.11e-8$
10^{-4}	$1.07e-1$	$2.43e-4$	$8.27e-7$	$1.86e-7$	$2.30e-8$	$2.44e-9$
10^{-5}	1.07	$2.17e-3$	$1.37e-5$	$3.08e-7$	$6.02e-10$	$4.72e-10$
10^{-6}	$1.07e+1$	$2.15e-2$	$1.52e-4$	$4.09e-6$	$6.65e-8$	$7.68e-10$

Таблица 7. Погрешность формулы Грегори (3.2) на равномерной сетке

ε	N					
	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8
1	$2.40e-5$	$1.66e-6$	$1.09e-7$	$6.94e-9$	$4.39e-10$	$2.76e-11$
10^{-1}	$2.63e-3$	$2.53e-4$	$1.99e-5$	$1.40e-6$	$9.28e-8$	$5.98e-9$
10^{-2}	$3.69e-2$	$1.36e-2$	$3.38e-3$	$5.20e-4$	$5.49e-5$	$4.55e-6$
10^{-3}	$4.59e-2$	$2.24e-2$	$1.07e-2$	$4.86e-3$	$1.93e-3$	$5.58e-4$
10^{-4}	$4.68e-2$	$2.33e-2$	$1.16e-2$	$5.76e-3$	$2.83e-3$	$1.36e-3$
10^{-5}	$4.69e-2$	$2.34e-2$	$1.17e-2$	$5.85e-3$	$2.92e-3$	$1.45e-3$
10^{-6}	$4.69e-2$	$2.34e-2$	$1.17e-2$	$5.86e-3$	$2.93e-3$	$1.46e-3$

Таблица 8. Погрешность и порядок точности формулы Грегори (3.15) в случае сетки (2.3)-(2.4)

ε	N					
	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8
10^{-1}	$1.35e-3$ 4.1	$7.71e-5$ 4.7	$2.99e-6$ 5.3	$7.84e-8$ 7.9	$3.35e-10$ 1.2	$1.44e-10$
10^{-2}	$6.61e-3$ 2.6	$1.10e-3$ 3.5	$9.84e-5$ 4.2	$5.33e-6$ 4.7	$1.99e-7$ 5.3	$4.89e-9$
10^{-3}	$1.52e-3$ 2.2	$3.42e-4$ 3.0	$4.34e-5$ 3.8	$3.09e-6$ 4.4	$1.42e-7$ 5.0	$4.55e-9$
10^{-4}	$3.60e-4$ 2.4	$6.90e-5$ 2.6	$1.11e-5$ 3.5	$9.83e-7$ 4.2	$5.31e-8$ 4.8	$1.97e-9$
10^{-5}	$1.72e-4$ 3.7	$1.35e-5$ 2.7	$2.15e-6$ 3.2	$2.27e-7$ 4.0	$1.41e-8$ 4.6	$5.79e-10$
10^{-6}	$1.46e-4$ 4.9	$4.74e-6$ 3.6	$3.91e-7$ 3.2	$4.22e-8$ 3.9	$2.89e-9$ 4.5	$1.26e-10$

Формула Грегори с улучшенной аппроксимацией производной. Остановимся на численном анализе формулы (3.15).

Таблица 9. Погрешность и порядок точности формулы Грегори (3.15) в случае сетки (2.3), (4.2)

ε	N					
	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8
1	$3.93e-6$ 5.9	$6.50e-8$ 5.8	$1.14e-9$ 2.3	$2.25e-10$ 3.6	$1.88e-11$ 3.8	$1.31e-12$
10^{-1}	$1.35e-3$ 4.1	$7.71e-5$ 4.7	$2.99e-6$ 5.3	$7.84e-8$ 7.9	$3.35e-10$ 1.2	$1.44e-10$
10^{-2}	$9.04e-4$ 2.2	$2.01e-4$ 2.7	$3.14e-5$ 3.1	$3.66e-6$ 3.8	$2.58e-7$ 4.2	$1.40e-8$
10^{-3}	$2.37e-4$ 3.3	$2.36e-5$ 2.9	$3.20e-6$ 3.3	$3.36e-7$ 3.7	$2.56e-8$ 4.2	$1.39e-9$
10^{-4}	$1.71e-4$ 4.8	$5.96e-6$ 3.9	$3.86e-7$ 3.5	$3.31e-8$ 3.8	$2.40e-9$ 4.3	$1.25e-10$
10^{-5}	$1.65e-4$ 5.3	$4.19e-6$ 5.3	$1.04e-7$ 5.2	$2.87e-9$ 5.2	$7.90e-11$ 5.6	$1.64e-12$
10^{-6}	$1.64e-4$ 5.4	$4.01e-6$ 5.7	$7.59e-8$ 5.6	$1.56e-9$ 3.4	$1.53e-10$ 3.4	$1.43e-11$

Таблица 10. Погрешность и порядок точности формулы Грегори (3.15) в случае равномерной сетки

ε	N					
	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8
1	$3.93e-6$ 5.9	$6.50e-8$ 5.8	$1.14e-9$ 2.3	$2.25e-10$ 3.6	$1.88e-11$ 3.8	$1.31e-12$
10^{-1}	$1.35e-3$ 4.1	$7.71e-5$ 4.7	$2.99e-6$ 5.3	$7.84e-8$ 7.9	$3.35e-10$ 1.2	$1.44e-10$
10^{-2}	$3.34e-2$ 1.5	$1.19e-2$ 2.2	$2.62e-3$ 3.1	$3.06e-4$ 3.9	$2.03e-5$ 4.5	$8.84e-7$
10^{-3}	$4.24e-2$ 1.0	$2.07e-2$ 1.1	$9.85e-3$ 1.2	$4.43e-3$ 1.4	$1.72e-3$ 1.9	$4.56e-4$
10^{-4}	$4.33e-2$ 1.0	$2.16e-2$ 1.0	$1.08e-2$ 1.0	$5.33e-3$ 1.0	$2.61e-3$ 1.1	$1.26e-3$
10^{-5}	$4.34e-2$ 1.0	$2.17e-2$ 1.0	$1.08e-2$ 1.0	$5.42e-3$ 1.0	$2.70e-3$ 1.0	$1.35e-3$
10^{-6}	$4.34e-2$ 1.0	$2.17e-2$ 1.0	$1.08e-2$ 1.0	$5.42e-3$ 1.0	$2.71e-3$ 1.0	$1.36e-3$

В табл. 8 приведены погрешность и порядок точности $CR_{N,\varepsilon}$ формулы Грегори (3.15) в случае сетки (2.3)-(2.4). В табл. 9 приведены погрешность и порядок точности $CR_{N,\varepsilon}$ формулы Грегори (3.15) в случае сетки (2.3), (4.2). В табл. 10 приведены погрешность и порядок точности $CR_{N,\varepsilon}$ формулы Грегори (3.15) в случае равномерной сетки. Из экспериментов следует, что повышение точности аппроксимации производных в формуле Эйлера приводит к повышению точности квадратурной формулы Грегори. Если формулы Эйлера (2.6) и

Грегори (3.2) на сетке Шишкина (2.3), (4.2) при малых значениях N и ε приводили к существенным погрешностям, то погрешность формулы Грегори (3.15) в этом случае на несколько порядков ниже.

5. Заключение

Исследованы квадратурные формулы Эйлера и Грегори при численном интегрировании функции, имеющей большие градиенты в области пограничного слоя. Показано, что применение равномерной сетки приводит к существенным погрешностям. Исследована возможность использования кусочно-равномерных сеток с достаточно мелким шагом в погранслойной области, включая сетку Шишкина. Проведено обоснование четвертого порядка точности формул Эйлера и Грегори на сетке, с крупным шагом вне погранслойной области, где ограничена четвертая производная интегрируемой функции. Проведено численное сравнение точности квадратурных формул на различных сетках.

Список литературы

[1] И.С. Березин, Н.П. Жидков, *Методы вычислений*, Наука, Москва, 1966. MR0210276

[2] Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков *Численные методы*, Наука, Москва, 1987. MR0938739

[3] А.И. Задорин *Метод интерполяции для задачи с пограничным слоем*, Сибирский журнал вычисл. матем, **10**:3 (2007), 267–275.

[4] А.И. Задорин, Н.А. Задорин *Сплайн-интерполяция на равномерной сетке функции с погранслойной составляющей*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **50**:2 (2010), 221–233. MR2681147

[5] А.И. Задорин, Н.А. Задорин *Квадратурные формулы для функций с погранслойной составляющей*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **51**:11 (2011), 1952–1962. MR2933107

[6] Н.А. Задорин *Интерполяционные и квадратурные формулы для функций с погранслойной составляющей на сетке Шишкина*, Вестник Омского университета, **4** (2012), 17–20.

[7] Г.И. Шишкин *Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений*, УрО РАН, Екатеринбург, 1992.

[8] J.J.H. Miller, E. O'Riordan, G.I. Shishkin *Fitted Numerical Methods for Singular Perturbation Problems: Error Estimates in the Maximum Norm for Linear Problems in One and Two Dimensions. Revised Edition*, World Scientific Publishing, Singapore, 2012. MR2978532

[9] H.G. Roos, M. Stynes , L. Tobiska *Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations. Convection-Diffusion and Flow Problems. Springer Series in Computational Mathematics, 24*, Springer-Verlag, Berlin, 1996. MR1477665

Александр Иванович Задорин
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Омский филиал,
Певцова, 13,
644043, Омск, Россия
E-mail address: zadorin@ofim.oscsbras.ru

Никита Александрович Задорин
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Омский филиал,
Певцова, 13,
644043, Омск, Россия
E-mail address: nik-zadorin@yandex.ru