ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2013, том 53, № 12, с. 1997–2007

УДК 519.644.7

КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ С ПОГРАНСЛОЙНЫМИ СОСТАВЛЯЮЩИМИ[1)]

© 2013 г. А. И. Задорин
(644043 Омск, ул. Певцова, 13, Омский фил. Ин-та матем. им. С.Л. Соболева СО РАН)
e-mail: zadorin@ofim.oscsbras.ru
Поступила в редакцию 11.04.2013 г.

Строятся и исследуются кубатурные формулы для вычисления двойного интеграла от функции двух переменных с погранслойными составляющими. Наличие погранслойных составляющих приводит к существенному понижению точности кубатурных формул, построенных на основе формул Ньютона-Котеса. Построены аналоги кубатурных формул трапеций и Симпсона, точные на погранслойных составляющих. Получены оценки погрешности построенных формул, равномерные по градиентам интегрируемой функции в пограничных слоях. Библ. 11. Табл. 5.

Ключевые слова: функция двух переменных, пограничный слой, двойной интеграл, неполиномиальная интерполяция, кубатурная формула, оценка погрешности.

DOI: 10.7868/S004446691312017X

ВВЕДЕНИЕ

Построение квадратурных формул Ньютона-Котеса основано на приближении интегрируемой функции многочленом Лагранжа (см. [1], [2]). Наличие особенностей у интегрируемой функции, как известно, требует применения различных приемов (выделение весового множителя, сгущение сетки и другие) для обеспечения заданной точности квадратурных формул.

В [3] рассмотрен вопрос численного интегрирования функции одной переменной с быстро растущей погранслойной составляющей. Показано, что применение в данном случае составных формул Ньютона-Котеса с двумя и тремя узлами на равномерной сетке приводит к росту погрешности до величины порядка $O(h)$, где h – шаг сетки. В [3] построены аналоги формул трапеций и Симпсона, основанные на приближении интегрируемой функции неполиномиальным интерполянтом, точным на погранслойной составляющей. Получены оценки погрешности построенных квадратурных формул, равномерные по погранслойным изменениям интегрируемой функции.

В данной работе подход из [3] применен для построения кубатурных формул для интегрирования функций двух переменных с быстро меняющимися погранслойными составляющими. Такие функции, в частности, соответствуют решению сингулярно возмущенной эллиптической задачи (см. [4]–[7]).

Определим нормы функций: $\|v(x, y)\| = \max\limits_{x, y}|v(x, y)|$, $\|w(x)\| = \max\limits_{x}|w(x)|$. Пусть $[v]_\Omega$ – проекция функции $v(x, y)$ на сетку Ω. Определим $\|v\|_V = \max\limits_{(x, y) \in V} |v(x, y)|$, где V – замкнуто.

1. АНАЛОГ КУБАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ ТРАПЕЦИЙ

Рассмотрим вопрос построения кубатурной формулы для вычисления интеграла:

$$I(u) = \int\limits_a^b\int\limits_c^d u(x, y)dxdy \tag{1.1}$$

1) Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 13-01-00618, 11-01-00875) и ОМН РАН (проект 1.3.2 2012).

в случае функции $u(x, y)$, имеющей представление

$$u(x, y) = p(x, y) + d_1(x, y)\Phi(x) + d_2(x, y)\Theta(y) + d_3(x, y)\Phi(x)\Theta(y), \tag{1.2}$$

где функции $p(x, y)$, $d_j(x, y)$, $j = 1, 2, 3$, имеют ограниченные первые частные производные, функции $\Phi(x)$, $\Theta(y)$ известны, достаточно гладкие, но их производные не являются равномерно ограниченными.

Известно (см. [4], [5]), что решение эллиптической задачи

$$\begin{gathered}\varepsilon u_{xx} + \varepsilon u_{yy} + a_1(x)u_x + a_2(y)u_y - a_3(x, y)u = f(x, y), \quad (x, y) \in (0, 1)^2, \\ u(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma,\end{gathered} \tag{1.3}$$

где Γ – граница области, функции a_1, a_2, a_3, f, g – достаточно гладкие,

$$a_1(x) \ge \alpha > 0, \quad a_2(y) \ge \beta > 0, \quad a_3(x, y) \ge 0, \quad \varepsilon > 0,$$

имеет экспоненциальные пограничные слои у границ $x = 0$ и $y = 0$, и это решение может быть представлено в виде (1.2) при задании

$$\Phi(x) = \exp(-a_1(0)\varepsilon^{-1}x), \quad \Theta(y) = \exp(-a_2(0)\varepsilon^{-1}y). \tag{1.4}$$

Функции (1.4) имеют неограниченные производные при значениях ε, близких к нулю.

Пусть Ω – равномерная сетка области $[a, b] \times [c, d]$ с узлами (x_i, y_j), $i = 0, 1, \ldots, N_1$, $j = 0, 1, \ldots, N_2$, и шагами h_1, h_2 по x и y. Пусть $K_{i,j}^h$ – произвольная ячейка сетки Ω

$$K_{i,j}^h = \{(x, y) : x_i \le x \le x_{i+1}, y_j \le y \le y_{j+1}\}.$$

В [8] для ячейки $K_{i,j}^h$ построен интерполянт $u_{\Phi,\Theta}(x, y)$ функции $u(x, y)$, точный на функциях $\{1, \Phi(x), \Theta(y), \Phi(x)\Theta(y)\}$:

$$\begin{gathered}u_{\Phi,\Theta}(x, y) = (u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1} - u_{i+1,j} + u_{i,j})\frac{\Phi(x) - \Phi_i}{\Phi_{i+1} - \Phi_i}\frac{\Theta(y) - \Theta_j}{\Theta_{j+1} - \Theta_j} + \\ + (u_{i,j+1} - u_{i,j})\frac{\Theta(y) - \Theta_j}{\Theta_{j+1} - \Theta_j} + (u_{i+1,j} - u_{i,j})\frac{\Phi(x) - \Phi_i}{\Phi_{i+1} - \Phi_i} + u_{i,j},\end{gathered} \tag{1.5}$$

где $u_{i,j} = u(x_i, y_j)$, $\Phi_i = \Phi(x_i)$, $\Theta_j = \Theta(y_j)$. Интерполяционная формула (1.5) корректна, если функции $\Phi(x)$ и $\Theta(y)$ являются строго монотонными на интервалах $[x_i, x_{i+1}]$ и $[y_j, y_{j+1}]$ соответственно.

От (1.1) перейдем к вычислению интеграла для каждой ячейки $K_{i,j}^h$:

$$I_{i,j}(u) = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} u(x, y)dxdy.$$

Строим кубатурную формулу с учетом интерполяции (1.5):

$$S_{i,j}(u) = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} u_{\Phi,\Theta}(x, y)dxdy. \tag{1.6}$$

Подставляя (1.5) в (1.6) и интегрируя, получаем

$$S_{i,j}(u) = [(u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1} - u_{i+1,j} + u_{i,j})R_iG_j + (u_{i,j+1} - u_{i,j})G_j + (u_{i+1,j} - u_{i,j})R_i + u_{i,j}]h_1h_2, \tag{1.7}$$

где

$$R_i = \frac{\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \Phi(x)dx - h_1\Phi_i}{h_1(\Phi_{i+1} - \Phi_i)}, \quad G_j = \frac{\int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} \Theta(y)dy - h_2\Theta_j}{h_2(\Theta_{j+1} - \Theta_j)}. \tag{1.8}$$

Покажем, что если функции $\Phi(x)$ и $\Theta(y)$ строго монотонны на сеточных интервалах $[x_i, x_{i+1}]$ и $[y_j, y_{j+1}]$, то

$$0 < R_i < 1, \quad 0 < G_j < 1. \tag{1.9}$$

Остановимся на случае строгого возрастания $\Phi(x)$. Очевидно, что тогда в (1.8) $R_i > 0$. Условие $R_i < 1$ сводится к неравенству

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \Phi(x)dx < \Phi_{i+1}h_1.$$

Это неравенство верно в силу возрастания $\Phi(x)$. Другие случаи рассматриваются аналогично, что доказывает неравенство (1.9).

Лемма 1. *Пусть функции $\Phi(x)$ и $\Theta(y)$ непрерывны и строго монотонны на сеточных интервалах $[x_i, x_{i+1}]$ и $[y_j, y_{j+1}]$ соответственно,*

$$\|p_x\|, \|p_y\|, \|(d_j)_x\|, \|(d_j)_y\| \le C_0, \quad j = 1, 2, 3. \tag{1.10}$$

Тогда справедлива оценка

$$|S_{i,j}(u) - I_{i,j}(u)| \le C_0 h_1 h_2 (h_1 + h_2)[3 + 5(\|\Phi\| + \|\Theta\| + \|\Phi\|\|\Theta\|)]. \tag{1.11}$$

Доказательство. Очевидно, что

$$|S_{i,j}(u) - I_{i,j}(u)| \le h_1 h_2 \|u_{\Phi,\Theta} - u\|_{K_{i,j}^h}. \tag{1.12}$$

Для $(x, y) \in K_{i,j}^h$ определим

$$\tilde{u}(x, y) = p(x, y) + d_1(x_i, y_j)\Phi(x) + d_2(x_i, y_j)\Theta(y) + d_3(x_i, y_j)\Phi(x)\Theta(y). \tag{1.13}$$

Используем очевидное неравенство

$$\|u_{\Phi,\Theta} - u\|_{K_{i,j}^h} \le \|u_{\Phi,\Theta} - \tilde{u}_{\Phi,\Theta}\|_{K_{i,j}^h} + \|\tilde{u}_{\Phi,\Theta} - \tilde{u}\|_{K_{i,j}^h} + \|\tilde{u} - u\|_{K_{i,j}^h}. \tag{1.14}$$

Учитывая (1.2), (1.10) и (1.13), несложно показать, что

$$\|\tilde{u} - u\|_{K_{i,j}^h} \le C_0(h_1 + h_2)[\|\Phi\| + \|\Theta\| + \|\Phi\|\|\Theta\|]. \tag{1.15}$$

Интерполяция (1.5) является точной на функциях $\Phi(x)$, $\Theta(y)$, $\Phi(x)\Theta(y)$, поэтому

$$\|\tilde{u}_{\Phi,\Theta} - \tilde{u}\|_{K_{i,j}^h} = \|p_{\Phi,\Theta} - p\|_{K_{i,j}^h}.$$

Учитывая (1.10) и строгую монотонность функций $\Phi(x)$, $\Theta(y)$ на интервалах $[x_i, x_{i+1}]$ и $[y_i, y_{j+1}]$ соответственно, получаем

$$\|\tilde{u}_{\Phi,\Theta} - \tilde{u}\|_{K_{i,j}^h} \le 3C_0(h_1 + h_2). \tag{1.16}$$

Теперь оценим $\|u_{\Phi,\Theta} - \tilde{u}_{\Phi,\Theta}\|_{K_{i,j}^h}$. Соотношение (1.5) можно записать в виде

$$u_{\Phi,\Theta}(x, y) = u_{i,j}\frac{\Phi_{i+1} - \Phi(x)}{\Phi_{i+1} - \Phi_i}\frac{\Theta_{j+1} - \Theta(y)}{\Theta_{j+1} - \Theta_j} + u_{i,j+1}\frac{\Phi_{i+1} - \Phi(x)}{\Phi_{i+1} - \Phi_i}\frac{\Theta(y) - \Theta_j}{\Theta_{j+1} - \Theta_j} +$$
$$+ u_{i+1,j}\frac{\Phi(x) - \Phi_i}{\Phi_{i+1} - \Phi_i}\frac{\Theta_{j+1} - \Theta(y)}{\Theta_{j+1} - \Theta_j} + u_{i+1,j+1}\frac{\Phi(x) - \Phi_i}{\Phi_{i+1} - \Phi_i}\frac{\Theta(y) - \Theta_j}{\Theta_{j+1} - \Theta_j}.$$

Учитывая (1.15) и строгую монотонность функций $\Phi(x)$, $\Theta(y)$ на сеточных интервалах, из последнего соотношения получаем

$$\|u_{\Phi,\Theta} - \tilde{u}_{\Phi,\Theta}\|_{K_{i,j}^h} \le 4C_0(h_1 + h_2)[\|\Phi\| + \|\Theta\| + \|\Phi\|\|\Theta\|]. \tag{1.17}$$

Учитывая оценки (1.15)–(1.17) в (1.14), имеем

$$\|u_{\Phi,\Theta} - u\|_{K_{i,j}^h} \le C_0(h_1 + h_2)[3 + 5(\|\Phi\| + \|\Theta\| + \|\Phi\|\|\Theta\|)]. \tag{1.18}$$

Используя оценку (1.18) в (1.12), получаем утверждение леммы.

Неравенство (1.18) дает оценку погрешности интерполянта (1.5) для произвольной прямоугольной ячейки $K_{i,j}^h$.

В построенной формуле (1.7) приведем подобные по узлам сетки:

$$S_{i,j}(u) = h_1h_2[(1-R_i)(1-G_j)u_{i,j} + R_i(1-G_j)u_{i+1,j} + G_j(1-R_i)u_{i,j+1} + R_iG_ju_{i+1,j+1}]. \quad (1.19)$$

Если функции $\Phi(x)$, $\Theta(y)$ строго монотонны на сеточных интервалах $[x_i, x_{i+1}]$, $[y_j, y_{j+1}]$, то выполняются неравенства (1.9). Тогда коэффициенты формулы (1.19) положительны и справедлива оценка устойчивости

$$|S_{i,j}(u) - S_{i,j}(\tilde{u})| \le \max_{m,k}|u_{m,k} - \tilde{u}_{m,k}|h_1h_2, \quad m = i, i+1, \quad k = j, j+1.$$

В случае $\Phi(x) = x$, $\Theta(y) = y$ выполнится $R_i = G_j = 1/2$. Тогда из (1.19) следует кубатурная формула трапеций

$$S_{i,j}^{tr}(u) = \frac{h_1h_2}{4}(u_{i+1,j+1} + u_{i,j+1} + u_{i,j} + u_{i+1,j}). \quad (1.20)$$

В соответствии с ([2, с. 230]) для формулы (1.20) справедлива оценка погрешности:

$$\left|S_{i,j}^{tr}(u) - I_{i,j}(u)\right| \le \frac{h_1h_2}{12}[h_1^2\|u_{xx}\|_{K_{i,j}^h} + h_2^2\|u_{yy}\|_{K_{i,j}^h}], \quad (1.21)$$

где функция $u(x, y)$ – достаточно гладкая. Тогда для составной формулы

$$S^{tr}(u) = \sum_{i,j} S_{i,j}^{tr}(u), \quad 0 \le i < N_1, \quad 0 \le j < N_2 \quad (1.22)$$

справедлива оценка

$$\left|S^{tr}(u) - I(u)\right| \le \frac{1}{12}(b-a)(d-c)[h_1^2\|u_{xx}\| + h_2^2\|u_{yy}\|]. \quad (1.23)$$

Если производные $u_{xx}(x, y)$, $u_{yy}(x, y)$ не являются равномерно ограниченными в области интегрирования, то оценка (1.23) не обеспечивает второй порядок точности формулы (1.22).

Используя формулу (1.19), выпишем составную кубатурную формулу

$$S(u) = \sum_{i,j} S_{i,j}(u), \quad 0 \le i < N_1, \quad 0 \le j < N_2. \quad (1.24)$$

Используя оценку (1.11), получаем оценку погрешности формулы (1.24):

$$|S(u) - I(u)| \le C_0(b-a)(d-c)(h_1 + h_2)[3 + 5(\|\Phi\| + \|\Theta\| + \|\Phi\|\|\Theta\|)]. \quad (1.25)$$

Оценка (1.25) соответствует лишь первому порядку точности построенной формулы (1.24), но равномерна по производным функций $\Phi(x)$ и $\Theta(y)$.

Порядок точности составной формулы можно повысить, если построенную формулу (1.19) применять только в областях пограничного слоя, а вне пограничных слоев, где производные $u_{xx}(x, y)$, $u_{yy}(x, y)$ равномерно ограничены, применять классическую формулу (1.20).

Рассмотрим случай, когда погранслои расположены у границ $x = a$, $y = c$. Пусть при $x \ge a + \sigma_1$ $|u_{xx}(x, y)| \le C_1$ и при $y \ge c + \sigma_2$ $|u_{yy}(x, y)| \le C_1$ для некоторой постоянной C_1. Пусть $i_0 = \min\{i : x_i \ge a + \sigma_1\}$, $j_0 = \min\{j : y_j \ge c + \sigma_2\}$. Комбинированную составную формулу зададим в виде

$$S^{\text{comb}}(u) = \sum_{i,j} S_{i,j}^{\text{comb}}(u), \quad 0 \le i < N_1, \quad 0 \le j < N_2, \quad (1.26)$$

где $S_{i,j}^{\text{comb}}(u) = S_{i,j}^{tr}(u)$, если $i \ge i_0$ и $j \ge j_0$; $S_{i,j}^{\text{comb}}(u) = S_{i,j}(u)$ – иначе. Тогда в соответствии с (1.11) и (1.21) для погрешности формулы (1.26) справедлива оценка

$$\begin{gathered}\left|S^{\text{comb}}(u) - I(u)\right| \le (i_0 N_2 + j_0 N_1 - i_0 j_0) h_1 h_2 (h_1 + h_2)[3 + 5(\|\Phi\| + \|\Theta\| + \|\Phi\|\|\Theta\|)]C_0 + \\ + (N_1 - i_0)(N_2 - j_0)\frac{h_1 h_2}{12}[h_1^2 + h_2^2]C_1.\end{gathered} \tag{1.27}$$

Из (1.27) следует, что если $i_0 \ll N_1$ и $j_0 \ll N_2$, то формула (1.26) имеет второй порядок точности равномерно по производным функций $\Phi(x)$, $\Theta(y)$.

2. АНАЛОГ КУБАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ СИМПСОНА

Построим аналог кубатурной формулы Симпсона, точный на погранслойных составляющих интегрируемой функции. Будем предполагать, что интегрируемая функция представима в виде

$$u(x, y) = p(x, y) + d_1(y)\Phi(x) + d_2(x)\Theta(y) + d_3\Phi(x)\Theta(y), \tag{2.1}$$

где функции $p(x, y)$, $d_1(y)$, $d_2(x)$ имеют равномерно ограниченные вторые производные по своим аргументам, погранслойные составляющие $\Phi(x)$, $\Theta(y)$ заданы, достаточно гладкие, но имеют области больших градиентов. Представление функции (2.1) является частным случаем (1.2), оно может иметь место (см. [4]) для решения задачи (1.3), при этом $\Phi(x)$, $\Theta(y)$ соответствуют функциям из (1.4).

Будем предполагать, что количество сеточных интервалов по направлениям x и y является четным. В соответствии с [8] строим интерполяционную формулу для произвольной укрупненной ячейки

$$K_{i,j}^{2h} = \{x_{i-1} \le x \le x_{i+1}, y_{j-1} \le y \le y_{j+1}\}$$

с условиями интерполяции в девяти узлах $\{x_{i,j}, x_{i\pm1,j\pm1}, x_{i,j\pm1}, x_{i\pm1,j}\}$.

Для этого сначала на интервале $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ при заданном y используем формулу одномерной интерполяции (см. [9], [10]), точную на составляющей $\Phi(x)$:

$$\begin{gathered}u_\Phi(x, y) = u(x_i, y) + \frac{u(x_i, y) - u(x_{i-1}, y)}{h_1}(x - x_i) + \\ + \frac{u(x_{i+1}, y) - 2u(x_i, y) + u(x_{i-1}, y)}{\Phi_{i+1} - 2\Phi_i + \Phi_{i-1}}\left[\Phi(x) - \Phi_i - \frac{\Phi_i - \Phi_{i-1}}{h_1}(x - x_i)\right].\end{gathered} \tag{2.2}$$

Затем осуществим интерполяцию по y, точную на составляющей $\Theta(y)$, и получим интерполянт для всей ячейки $K_{i,j}^{2h}$:

$$\begin{gathered}u_{\Phi,\Theta}([u]_\Omega, x, y) = u_\Phi(x, y_j) + \frac{u_\Phi(x, y_j) - u_\Phi(x, y_{j-1})}{h_2}(y - y_j) + \\ + \frac{u_\Phi(x, y_{j+1}) - 2u_\Phi(x, y_j) + u_\Phi(x, y_{j-1})}{\Theta_{j+1} - 2\Theta_j + \Theta_{j-1}}\left[\Theta(y) - \Theta_j - \frac{\Theta_j - \Theta_{j-1}}{h_2}(y - y_j)\right].\end{gathered} \tag{2.3}$$

Интерполяция $I_{\Phi,\Theta}([u]_\Omega, x, y)$ является точной на функциях

$$1, x, y, xy, \Phi(x), \Theta(y), \Phi(x)\Theta(y), x\Theta(y), y\Phi(x). \tag{2.4}$$

В [8] показано, что при определенных ограничениях на $\Phi(x)$ и $\Theta(y)$, в частности, когда вторые производные этих функций сохраняют знак на интервалах (x_{i-1}, x_{i+1}), (y_{j-1}, y_{j+1}), интерполянт $I_{\Phi,\Theta}([u]_\Omega, x, y)$ приближает $u(x, y)$ со вторым порядком точности, равномерно по производным погранслойных составляющих.

Пусть

$$I_{i,j}^{2h}(u) = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\int\limits_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} u(x, y)\,dx\,dy. \tag{2.5}$$

Учитывая в (2.5) интерполянт (2.2)–(2.3), получаем кубатурную формулу для ячейки $K_{i,j}^{2h}$:

$$S_{i,j}^{2h}(u) = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} I_{\Phi,\Theta}([u]_\Omega, x, y)dxdy. \tag{2.6}$$

Интегрируя в (2.6), имеем

$$\begin{gathered}S_{i,j}^{2h}(u) = 4h_1h_2[u_{i,j} + R_i(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) + G_j(u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}) + \\ + R_iG_j(u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1} - 2u_{i+1,j} + 4u_{i,j} - 2u_{i-1,j} + u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1})],\end{gathered} \tag{2.7}$$

где

$$R_i = \frac{\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \Phi(x)dx - 2h_1\Phi_i}{2h_1(\Phi_{i+1} - 2\Phi_i + \Phi_{i-1})}, \quad G_j = \frac{\int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} \Theta(y)dy - 2h_2\Theta_j}{2h_2(\Theta_{j+1} - 2\Theta_j + \Theta_{j-1})}.$$

Несложно убедиться, что формула (2.7) точна на функциях из (2.4).

Лемма 2. *Пусть функция $u(x, y)$ имеет представление* (2.1), *производные $\Phi''(x)$ и $\Theta''(y)$ не меняют знак на интервалах (x_{i-1}, x_{i+1}) и (y_{j-1}, y_{j+1}). Тогда справедлива оценка погрешности*

$$\begin{gathered}\left|I_{i,j}^{2h}(u) - S_{i,j}^{2h}(u)\right| \le 4h_1h_2\left[\left(\frac{7}{6}\max_{x,y}|p_{xx}(x, y)| + \|d_2''\|\|\Theta\|\right)h_1^2 + \left(\frac{7}{6}\max_{x,y}|p_{yy}(x, y)| + \|d_1''\|\|\Phi\|\right)h_2^2\right], \\ (x, y) \in K_{i,j}^{2h}.\end{gathered} \tag{2.8}$$

Доказательство. Сначала докажем, что

$$0 < R_i < \frac{1}{2}, \quad 0 < G_j < \frac{1}{2}. \tag{2.9}$$

Неравенство $R_i > 0$ следует из того, что для произвольной дважды непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$ справедливо соотношение ([1, с. 183])

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)dx - 2h_1f(x_i) = \frac{h_1^3}{3}f''(s_1), \quad \exists s_1 \in (x_{i-1}, x_{i+1}),$$

и

$$f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1} = h_1^2 f''(s_2), \quad \exists s_2 \in (x_{i-1}, x_{i+1}). \tag{2.10}$$

Пусть для определенности $\Phi''(x) > 0$, $x \in (x_{i-1}, x_{i+1})$. Тогда неравенство $R_i < 1/2$ равносильно неравенству

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \Phi(x)dx < 2h_1\frac{\Phi_{i-1} + \Phi_{i+1}}{2}.$$

Если $\Phi''(x) > 0$, то последнее неравенство для формулы трапеций выполнено. Итак, неравенство на R_i в (2.9) обосновано. Обоснование второго неравенства в (2.9) проводится аналогично.

Зададим

$$\tilde{u}(x, y) = p(x, y) + [d_1(y_j) + (y - y_j)d_1'(y_j)]\Phi(x) + [d_2(x_i) + (x - x_i)d_2'(x_i)]\Theta(y) + d_3\Phi(x)\Theta(y).$$

Учитывая, что формула (2.7) точна на функциях из (2.4), получаем

$$\begin{gathered}S_{i,j}^{2h}(\tilde{u}) - I_{i,j}^{2h}(\tilde{u}) = S_{i,j}^{2h}(p) - I_{i,j}^{2h}(p) = [4h_1h_2p_{i,j} - I_{i,j}^{2h}(p)] + \\ + 4h_1h_2[R_i(p_{i+1,j} - 2p_{i,j} + p_{i-1,j}) + G_j(p_{i,j+1} - 2p_{i,j} + p_{i,j-1}) + \\ + R_iG_j(p_{i+1,j+1} - 2p_{i,j+1} + p_{i-1,j+1} - 2p_{i+1,j} + 4p_{i,j} - 2p_{i-1,j} + p_{i+1,j-1} - 2p_{i,j-1} + p_{i-1,j-1})].\end{gathered} \tag{2.11}$$

Учитывая соотношение (2.10), из (2.11) имеем

$$\begin{gathered}\left|S_{i,j}^{2h}(\tilde{u}) - I_{i,j}^{2h}(\tilde{u})\right| \le \left|4h_1h_2p_{i,j} - I_{i,j}^{2h}(p)\right| + 4h_1h_2[R_i\max_{x,y}|p_{xx}(x,y)|h_1^2 + G_j\max_{x,y}|p_{yy}(x,y)|h_2^2 + \\ + 2R_iG_j(\max_{x,y}|p_{xx}(x,y)|h_1^2 + \max_{x,y}|p_{yy}(x,y)|h_2^2)], \quad (x,y) \in K_{i,j}^{2h}.\end{gathered} \tag{2.12}$$

Для кубатурной формулы прямоугольников справедлива оценка погрешности (см. [11, с. 109])

$$\left|4h_1h_2p_{i,j} - I_{i,j}^{2h}(p)\right| \le \frac{2}{3}h_1h_2[\max_{x,y}|p_{xx}(x,y)|h_1^2 + \max_{x,y}|p_{yy}(x,y)|h_2^2], \quad (x,y) \in K_{i,j}^{2h}. \tag{2.13}$$

Учитывая соотношения (2.9), (2.13), из (2.12) получаем оценку

$$\left|I_{i,j}^{2h}(\tilde{u}) - S_{i,j}^{2h}(\tilde{u})\right| \le \frac{14}{3}h_1h_2[\max_{x,y}|p_{xx}(x,y)|h_1^2 + \max_{x,y}|p_{yy}(x,y)|h_2^2], \quad (x,y) \in K_{i,j}^{2h}. \tag{2.14}$$

Далее воспользуемся неравенством

$$\left|I_{i,j}^{2h}(u) - S_{i,j}^{2h}(u)\right| \le \left|I_{i,j}^{2h}(u - \tilde{u})\right| + \left|I_{i,j}^{2h}(\tilde{u}) - S_{i,j}^{2h}(\tilde{u})\right| + \left|S_{i,j}^{2h}(u - \tilde{u})\right|. \tag{2.15}$$

Оцениваем модули в (2.15).

В соответствии с оценкой погрешности разложения в ряд Тейлора имеем

$$\|u - \tilde{u}\|_{K_{i,j}^{2h}} \le \frac{h_1^2}{2}\|d_2''\|\|\Theta\| + \frac{h_2^2}{2}\|d_1''\|\|\Phi\|.$$

Следовательно,

$$\left|I_{i,j}^{2h}(u - \tilde{u})\right| \le 2h_1h_2[h_1^2\|d_2''\|\|\Theta\| + h_2^2\|d_1''\|\|\Phi\|]. \tag{2.16}$$

Распишем кубатурную формулу (2.7) по узлам сетки:

$$\begin{gathered}S_{i,j}^{2h}(u) = 4h_1h_2[(1 - 2R_i - 2G_j + 4R_iG_j)u_{i,j} + R_i(1 - 2G_j)u_{i+1,j} + \\ + R_i(1 - 2G_j)u_{i-1,j} + G_j(1 - 2R_i)u_{i,j+1} + G_j(1 - 2R_i)u_{i,j-1} + R_iG_ju_{i+1,j+1} + \\ + R_iG_ju_{i-1,j-1} + R_iG_ju_{i+1,j-1} + R_iG_ju_{i-1,j+1}].\end{gathered} \tag{2.17}$$

Учитывая (2.9), получаем, что все коэффициенты формулы (2.17) положительны и их сумма равна $4h_1h_2$. Следовательно, имеем

$$\left|S_{i,j}^{2h}(u - \tilde{u})\right| \le 4h_1h_2\|u - \tilde{u}\|_{K_{i,j}^{2h}} \le 2h_1h_2[h_1^2\|d_2''\|\|\Theta\| + h_2^2\|d_1''\|\|\Phi\|]. \tag{2.18}$$

Учитывая (2.14), (2.16), (2.18) в (2.15), приходим к (2.8). Лемма доказана.

Из (2.17) следует кубатурная формула Симпсона при задании $\Phi(x) = x^2$, $\Theta(y) = y^2$. Тогда $R_i = G_j = 1/6$ и формула (2.17) принимает вид

$$\begin{gathered}S_{i,j}^{\mathrm{sim}}(u) = \frac{1}{9}h_1h_2[16u_{i,j} + 4u_{i+1,j} + 4u_{i-1,j} + 4u_{i,j+1} + 4u_{i,j-1} + u_{i+1,j+1} + \\ + u_{i-1,j-1} + u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j+1}].\end{gathered} \tag{2.19}$$

Из сведения двойного интеграла (2.5) к повторному и учета погрешности квадратурной формулы Симпсона из [2] следует оценка погрешности формулы (2.19) в случае достаточной гладкой функции $u(x, y)$:

$$\left|I_{i,j}^{2h}(u) - S_{i,j}^{\mathrm{sim}}(u)\right| \le \frac{4h_1h_2}{180}[\max_{x,y}\left|u_x^{(4)}(x,y)\right|h_1^4 + \max_{x,y}\left|u_y^{(4)}(x,y)\right|h_2^4], \quad (x,y) \in K_{i,j}^{2h}.$$

Используя (2.19), запишем составную кубатурную формулу Симпсона:

$$S^{\text{sim}}(u) = \sum_{i,j} S_{i,j}^{\text{sim}}(u), \quad i = 1, 3, \ldots, N_1 - 1, \quad j = 1, 3, \ldots, N_2 - 1. \tag{2.20}$$

Из оценки погрешности кубатурной формулы для ячейки $K_{i,j}^{2h}$ следует оценка погрешности для составной формулы (2.20):

$$|I(u) - S^{\text{sim}}(u)| \le \frac{1}{180}(b-a)(d-c)[\|u_x^{(4)}\|h_1^4 + \|u_y^{(4)}\|h_2^4]. \tag{2.21}$$

Теперь на основе построенной формулы (2.17) запишем составную кубатурную формулу

$$S^{2h}(u) = \sum_{i,j} S_{i,j}^{2h}(u), \quad i = 1, 3, \ldots, N_1 - 1, \quad j = 1, 3, \ldots, N_2 - 1. \tag{2.22}$$

Учитывая лемму 2, получаем

$$|I(u) - S^{2h}(u)| \le (b-a)(d-c)\left[\left(\frac{7}{6}\|p_{xx}\| + \|d_2''\|\|\Theta\|\right)h_1^2 + \left(\frac{7}{6}\|p_{yy}\| + \|d_1''\|\|\Phi\|\right)h_2^2\right]. \tag{2.23}$$

Из (2.23) следует, что формула (2.22) второго порядка точности равномерно по производным погранслойных составляющих $\Phi(x)$ и $\Theta(y)$.

Как и в случае построенного аналога формулы трапеций, вместо (2.22) можно построить более точную составную кубатурную формулу. Для этого зададим область пограничного слоя таким образом, чтобы вне нее производные $u_x^{(4)}(x, y)$ и $u_y^{(4)}(x, y)$ были равномерно ограниченными. Если ячейка $K_{i,j}^{2h}$ не пересекается с областью пограничного слоя, то в ней применяем классическую формулу (2.19), иначе – построенную формулу (2.17). Тогда, если число ячеек вне пограничного слоя намного больше числа ячеек в пограничном слое, точность составной кубатурной формулы повысится на порядок.

3. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Остановимся на вычислении интеграла:

$$I(u) = \int_0^1\int_0^1 u(x, y)dxdy,$$

где

$$u(x, y) = (1 - e^{-x/\varepsilon})(1 - e^{-2y/\varepsilon})(1 - x)(1 - y) + \cos(\pi x/2)e^{-y}, \quad \varepsilon \in (0, 1]. \tag{3.1}$$

Функция (3.1) соответствует представлению (1.2) при задании

$$\Phi(x) = e^{-x/\varepsilon}, \quad \Theta(y) = e^{-2y/\varepsilon}.$$

Всюду в таблицах под $e - m$ понимаем 10^{-m}. Предполагаем, что $h_1 = h_2 = h$.

В табл. 1 при различных ε и h приведены погрешность $\Delta(\varepsilon, h) = |I(u) - S(u)|$ и скорость сходимости $CR_{\varepsilon,h} = \log_2(\Delta(\varepsilon, h)/\Delta(\varepsilon, h/2))$ построенного аналога (1.24) кубатурной формулы трапеций. При малых ε формула (1.24) лишь первого порядка точности, что соответствует оценке (1.25).

Погрешность составной кубатурной формулы трапеций (1.22) с уменьшением ε увеличивается аналогично данным табл. 1, поэтому не приводится.

В табл. 2 приведены погрешность и скорость сходимости комбинированной формулы (1.26). При этом $\sigma_1 = -2\varepsilon\ln\varepsilon$, $\sigma_2 = -\varepsilon\ln(\varepsilon/2)$, $\varepsilon < 1$. Порядок точности формулы (1.26) почти при всех рассматриваемых ε и h близок ко второму, что согласуется с оценкой (1.27).

Теперь остановимся на составной кубатурной формуле Симпсона и ее аналогах.

В табл. 3 приведены погрешность и скорость сходимости кубатурной формулы Симпсона (2.20). При $\varepsilon = 1$ функция $u(x, y)$ не содержит погранслойных составляющих и погрешность форму-

Таблица 1. Погрешность и скорость сходимости построенного аналога кубатурной формулы трапеций (1.24)

ε	h					
	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}
1	8.97e–4 2.0	2.24e–4 2.0	5.61e–5 2.0	1.40e–5 2.0	3.51e–6 2.0	8.77e–7
10^{-1}	9.09e–3 2.0	2.31e–3 2.0	5.80e–4 2.0	1.45e–4 2.0	3.63e–5 2.0	9.07e–6
10^{-2}	4.68e–2 1.4	1.74e–2 1.7	5.37e–3 1.9	1.45e–3 2.0	3.70e–4 2.0	9.29e–5
10^{-3}	6.06e–2 1.0	2.99e–2 1.1	1.42e–2 1.2	6.35e–3 1.3	2.50e–3 1.6	8.04e–4
10^{-4}	6.20e–2 1.0	3.13e–2 1.0	1.56e–2 1.0	7.77e–3 1.0	6.81e–3 1.1	1.82e–3
10^{-5}	6.21e–2 1.0	3.14e–2 1.0	1.58e–2 1.0	7.90e–3 1.0	3.95e–3 1.0	1.97e–3

Таблица 2. Погрешность и скорость сходимости комбинированной формулы (1.26)

ε	h					
	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}
10^{-1}	6.63e–3 2.0	1.63e–3 2.0	4.06e–4 2.0	1.00e–4 2.0	2.50e–5 2.0	6.27e–6
10^{-2}	1.03e–2 1.6	3.33e–3 1.8	9.36e–4 1.9	2.54e–4 2.0	6.51e–5 2.0	1.63e–5
10^{-3}	9.54e–3 2.0	2.39e–3 2.1	5.75e–4 1.7	1.82e–4 1.4	7.28e–5 1.6	2.43e–5
10^{-4}	9.78e–3 2.0	2.52e–3 2.0	6.38e–4 2.0	1.58e–4 2.0	3.90e–5 2.1	9.33e–6
10^{-5}	9.80e–3 2.0	2.53e–3 2.0	6.44e–4 2.0	1.62e–4 2.0	4.06e–5 2.0	1.01e–5

лы (2.20) – величина порядка $O(h^4)$, что согласуется с оценкой (2.21). Однако при малых значениях ε производные $u_x^{(4)}$, $u_y^{(4)}$ становятся значительными, что приводит к росту погрешности кубатурной формулы до величины порядка $O(h)$.

В табл. 4 приведены погрешность и скорость сходимости построенного аналога формулы Симпсона (2.22). Формула (2.22) четвертого порядка точности при $\varepsilon = 1$ и второго порядка точности при малых значениях ε, что согласуется с оценкой (2.23).

В табл. 5 приведены погрешность и скорость сходимости комбинированной составной формулы, когда в ячейках $K_{i,j}^{2h}$, пересекающихся с пограничными слоями, применяется построенная формула (2.17), иначе – кубатурная формула Симпсона (2.19).

В случае функции (3.1) пограничные слои расположены у границ области $x = 0$ и $y = 0$. Задаем σ_1 из условия $\left|(e^{-x/\varepsilon})_x^{(4)}\right| \le 1$ при $x \ge \sigma_1$. Аналогично задаем σ_2 из условия $\left|(e^{-2y/\varepsilon})_y^{(4)}\right| \le 1$ при $y \ge \sigma_2$. Тогда находим $\sigma_1 = -4\varepsilon\ln\varepsilon$, $\sigma_2 = -2\varepsilon\ln(\varepsilon/2)$. В ячейке $K_{i,j}^{2h}$ применяем кубатурную формулу Симпсона (2.19), если $x_{i-1} \ge \sigma_1$ и $y_{j-1} \ge \sigma_2$. Иначе применяем построенную формулу (2.17).

Таблица 3. Погрешность и скорость сходимости кубатурной формулы Симпсона (2.20)

ε	h					
	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}
1	1.63e–8 3.9	1.06e–9 4.0	6.66e–11 4.0	4.16e–12 4.0	2.60e–13 4.2	1.37e–14
10^{-1}	3.12e–4 3.8	2.21e–5 4.0	1.43e–6 4.0	8.99e–8 4.0	5.63e–9 4.0	3.52e–10
10^{-2}	1.31e–2 2.3	3.84e–3 2.5	6.95e–4 3.3	7.30e–5 3.7	5.44e–6 3.9	3.57e–7
10^{-3}	1.97e–2 1.0	9.56e–3 1.1	4.43e–3 1.3	1.85e–3 1.6	6.05e–4 2.2	1.29e–4
10^{-4}	2.03e–2 1.0	1.02e–2 1.0	5.11e–3 1.0	2.52e–3 1.0	1.23e–3 1.1	5.76e–4
10^{-5}	2.03e–2 1.0	1.03e–2 1.0	5.17e–3 1.0	2.59e–3 1.0	1.29e–3 1.0	6.43e–4

Таблица 4. Погрешность и скорость сходимости построенного аналога кубатурной формулы Симпсона (2.22)

ε	h					
	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}
1	8.95e–8 4.0	5.56e–9 4.0	3.47e–10 4.0	2.17e–11 4.0	1.36e–12 3.9	9.24e–14
10^{-1}	3.37e–5 3.8	2.41e–6 4.0	1.56e–7 4.0	9.85e–9 4.0	6.17e–10 4.0	3.74e–11
10^{-2}	8.83e–5 1.9	2.32e–5 1.7	7.34e–6 3.0	8.65e–7 3.7	6.63e–8 3.9	4.38e–9
10^{-3}	3.60e–4 2.1	8.31e–5 2.3	1.72e–5 2.9	2.33e–6 3.6	1.87e–7 0.6	1.25e–7
10^{-4}	3.82e–4 2.0	9.49e–5 2.0	2.34e–5 2.0	5.69e–6 2.1	1.34e–6 2.2	2.92e–7
10^{-5}	3.85e–4 2.0	9.60e–5 2.0	2.40e–5 2.0	5.98e–6 2.0	1.49e–6 2.0	3.67e–7

Таблица 5. Погрешность и скорость сходимости комбинированной формулы, основанной на формуле Симпсона

ε	h					
	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}
10^{-1}	3.37e–5 3.8	2.41e–6 4.0	1.56e–7 4.0	9.85e–9 4.0	6.17e–10 4.0	3.85e–11
10^{-2}	1.62e–5 0.0	2.58e–5 1.9	6.82e–6 3.1	8.02e–7 4.0	6.18e–8 4.0	4.09e–9
10^{-4}	1.32e–4 2.9	1.75e–5 3.0	2.23e–6 3.0	2.70e–7 3.3	2.67e–8 3.4	2.59e–9
10^{-5}	1.32e–4 2.9	1.77e–5 3.0	2.29e–6 3.0	2.90e–7 3.0	3.62e–8 3.0	4.45e–9

Из табл. 5 следует, что применение комбинированной составной формулы при малых значениях ε привело к повышению точности вычислений на порядок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений. М.: Наука, 1966.
2. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Наука, 1987.
3. *Задорин А.И., Задорин Н.А.* Квадратурные формулы для функций с погранслойной составляющей // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 11. С. 1952–1962.
4. *Шишкин Г.И.* Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. Екатеринбург: УрО РАН, 1992.
5. *Miller J.J.H., O'Riordan E., Shishkin G.I.* Fitted numerical methods for singular perturbation problems: error estimates in the maximum norm for linear problems in one and two dimensions. Revised Edition. Singapore: World Scientific Publishing, 2012.
6. *Roos H.G., Stynes M., Tobiska L.* Numerical methods for singularly perturbed differential equations // Convection-Diffusion and Flow Problems. Springer Series in Computational Mathematics, 24. Berlin: Springer-Verlag, 1996.
7. *Shishkin G.I., Shishkina L.P.* Difference methods for singular perturbation problems. V. 140. Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. Boca Raton: Chapman&Hall/CRC, 2009.
8. *Задорин А.И., Задорин Н.А.* Интерполяция функций с погранслойными составляющими и ее применение в двухсеточном методе // Сибирские электронные математические известия. 2011. Т. 8. С. 247–267.
9. *Задорин А.И., Задорин Н.А.* Сплайн-интерполяция на равномерной сетке функции с погранслойной составляющей // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50. № 2. С. 221–233.
10. *Zadorin A.I.* Spline interpolation of functions with a boundary layer component // Internat. J. Numer. Anal. And Modeling. Series B. 2011. V. 2. № 2–3. P. 262–279.
11. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978.