S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 11, стр. 258–267 (2014) УДК 519.644
MSC 65D32

ФОРМУЛА СИМПСОНА И ЕЕ МОДИФИКАЦИИ ДЛЯ ФУНКЦИИ С ПОГРАНСЛОЙНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ

А.И. ЗАДОРИН, Н.А. ЗАДОРИН

Abstract. Quadrature formulas for a function with a boundary layer component are investigated. An application of Simpson rule on an uniform mesh for the integration of such function leads to significant errors. Two approaches to increase the accuracy are investigated: the fitting of Simpson rule to a boundary layer component and using Simpson rule on Shishkin mesh. Results of numerical experiments are discussed.

Keywords: definite integral, singular perturbation, boundary layer component, Simpson rule, modification, Shishkin mesh, error estimation

1. Введение

Применение составных квадратурных формул Ньютона-Котеса при интегрировании функций, имеющих погранслойные области больших градиентов, в соответствии с [1], приводит к погрешностям порядка $O(h)$, где h - шаг равномерной сетки.

В [1] построены аналоги квадратурных формул трапеций и Симпсона, точные на погранслойной составляющей. Предполагается, что интегрируемая функция представима в виде суммы регулярной составляющей с ограниченными производными до некоторого порядка и погранслойной составляющей, имеющей области больших градиентов. В [2], [3] разработаны аналоги формул

Zadorin A.I., Zadorin N.A. Simpson rule and its modifications for a function with a boundary layer component.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00618) и ОМН РАН (проект 1.3.2, 2012).

Поступила 4 февраля 2014 г., опубликована 1 апреля 2014 г.

Ньютона-Котеса с четырьмя и пятью узлами, соответственно, точные на погранслойной составляющей. Построение квадратурных формул в [1]-[3] основано на приближении подынтегральной функции интерполянтом, точным на погранслойной составляющей [4].

В [1]-[3] предполагается ограниченность $(n-1)$-ой производной регулярной составляющей и обосновывается $(n-1)$-ый порядок точности по шагу сетки построенных составных квадратурных формул, где n - число узлов квадратурной формулы, $n = 2, 3, 4, 5$. Полученные оценки погрешности равномерны по погранслойной составляющей и ее производным.

В данной работе предполагается, что интегрируемая функция соответствует решению сингулярно возмущенной краевой задачи и имеет область экспоненциального пограничного слоя [5], [6]. Сравним два подхода к построению квадратурных формул с тремя узлами: подгонка формулы к погранслойной составляющей и сгущение сетки в пограничном слое.

Итак, будем исследовать квадратурные формулы для вычисления интеграла:

$$I(u) = \int_0^1 u(x)\,dx, \tag{1.1}$$

где функция $u(x)$ является решением сингулярно возмущенной краевой задачи:

$$\varepsilon u''(x) + a_1(x)u'(x) - a_2(x)u(x) = f(x), \quad u(0) = A, \; u(1) = B, \tag{1.2}$$

где

$$a_1(x) \geq \alpha > 0, \; a_2(x) \geq 0, \; \varepsilon > 0,$$

функции $a_1(x), a_2(x), f(\mathrm{x})$– достаточно гладкие. В соответствии, например, с [6] для произвольного конечного $n \geq 1$ производная $u^{(n)}(x)$ является величиной порядка $O(\varepsilon^{-n})$ и неограниченно растет с уменьшением параметра ε, что приводит к понижению точности формулы Симпсона. Проведем анализ модификаций формулы Симпсона для вычисления нтеграла (1.1) в предположении, что $u(x)$ является решением сингулярно возмущенной задачи (1.2).

Всюду под C и $C_j, \; j \geq 0$, будем подразумевать положительные постоянные, не зависящие от ε и числа шагов сетки N.

2. Квадратурная формула, точная на погранслойной составляющей

Пусть $\Omega = \{x_n : \; x_n = nh, \; n = 0, 1, \ldots, N, \; h = 1/N\}$ – равномерная сетка интервала $[0, 1]$. Предполагаем, что N четно и выпишем составную квадратурную формулу Симпсона для интеграла (1.1):

$$S(u) = \frac{h}{3} \sum_{n=1,2}^{N-1} \Big(u_{n-1} + 4u_n + u_{n+1} \Big). \tag{2.1}$$

Если $u(x) \in C^4[0, 1]$, то для формулы (2.1) справедлива оценка погрешности [7]:

$$|I(u) - S(u)| \leq \max_{x \in [0,1]} |u^{(4)}(x)| \frac{h^4}{180}. \tag{2.2}$$

Согласно (2.2), составная формула Симпсона (2.1) имеет погрешность порядка $O(h^4)$, если производная $u^{(4)}(x)$ равномерно ограничена. В [1] показано, что в случае функции $u(x) = e^{-x/\varepsilon}$ при $\varepsilon \le h$ формула Симпсона (2.1) имеет погрешность порядка $O(h)$. Таким образом, погрешность формулы (2.1) при $\varepsilon = 1$ является величиной порядка $O(h^4)$, а с уменьшением ε растет до величины порядка $O(h)$.

В [1] построен аналог формулы Симпсона для интегрирования функции вида

$$u(x) = p(x) + \gamma\Phi(x),\ \ x \in [0,1], \tag{2.3}$$

где функция $p(x)$ имеет ограниченную вторую производную, а функция $\Phi(x)$ известна и ее производные не являются равномерно ограниченными. Квадратурная формула в [1] построена таким образом, чтобы она была точной на погранслойной составляющей $\Phi(x)$. Выпишем эту формулу для произвольного интервала $[x_{n-1}, x_{n+1}]$. Пусть

$$I_n(u) = \int\limits_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} u(x)\,dx, \quad n = 1, 3, \ldots, N-1. \tag{2.4}$$

Квадратурная формула для интеграла (2.4), точная на $\Phi(x)$, имеет вид:

$$S_{\Phi,n}(u) = 2h\Big[G_{3,n}u_{n-1} + (1 - 2G_{3,n})u_n + G_{3,n}u_{n+1}\Big], \tag{2.5}$$

где

$$G_{3,n} = \frac{\int\limits_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} \Phi(x)\,dx - 2\Phi_n h}{2h(\Phi_{n-1} - 2\Phi_n + \Phi_{n+1})}. \tag{2.6}$$

На основе формулы (2.5) построим составную квадратурную формулу:

$$S_\Phi(u) = \sum_{n=1,2}^{N-1} S_{\Phi,n}(u). \tag{2.7}$$

В [1] доказано, если $\Phi''(x)$ не меняет знак на интервалах (x_{n-1}, x_{n+1}), используемых в (2.7), то для погрешности формулы (2.7) справедлива оценка:

$$|I(u) - S_\Phi(u)| \le \frac{2}{3}\max_s |p''(s)| h^2. \tag{2.8}$$

По предположению интегрируемая функция $u(x)$ является решением краевой задачи (1.2). В соответствии с [6], [8] для решения задачи (1.2) справедливы оценки производных:

$$|u^{(j)}(x)| \le C\Big[1 + \frac{1}{\varepsilon^j}e^{-\alpha\varepsilon^{-1}x}\Big],\ \ 0 \le j \le 4. \tag{2.9}$$

Выделяя погранслойную составляющую в решении задачи (1.2), зададим

$$\Phi(x) = e^{-a_0\varepsilon^{-1}x},\ \ \gamma = -\varepsilon u'(0)/a_0,\ \ a_0 = a_1(0). \tag{2.10}$$

Тогда в соответствии с [8] для функции $u(x)$ справедливо представление (2.3) со следующими оценками производных регулярной составляющей $p(x)$:

$$|p^{(j)}(x)| \le C_0\Big[1 + \frac{1}{\varepsilon^{j-1}}e^{-\alpha\varepsilon^{-1}x}\Big],\ \ 0 \le j \le 4. \tag{2.11}$$

Составляющая $\Phi(x)$ из (2.10) задает основной погранслойный рост функции $u(x)$ и интегрируема в явном виде. Следовательно, эта функция может быть использована при построении квадратурной формулы (2.5). Однако, оценка погрешности (2.8) для формулы (2.7) не может быть использована, так как в соответствии с (2.11) производная $p''(x)$ может не быть ограниченной равномерно по параметру ε.

Докажем, что и в случае ограничений (2.11) для квадратурной формулы (2.7) справедлива оценка погрешности, равномерная по параметру ε.

Лемма 1. *Пусть функция $u(x)$ является решением задачи (1.2), в представлении (2.3) составляющая $\Phi(x)$ и постоянная γ заданы в соответствии с (2.10). Тогда для формулы (2.7) справедлива оценка погрешности:*

$$|S_\Phi(u) - I(u)| < \frac{5}{6}\Big(1+\alpha^{-1}\Big)\frac{C_0}{N^2}, \tag{2.12}$$

где C_0 и α соответствуют (2.11).

Доказательство. Формулу (2.5) запишем в виде:

$$S_{\Phi,n}(u) = 2hu_n + 2h(u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1})G_{3,n}.$$

Используя данное представление, несложно убедиться, что формула (2.5) с $G_{3,n}$ из (2.6) точна на погранслойной составляющей $\Phi(x)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} S_{\Phi,n}(u) - I_n(u) = S_{\Phi,n}(p) - I_n(p) = \\ = (2hp_n - I_n(p)) + 2h(p_{n-1} - 2p_n + p_{n+1})G_{3,n}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Учитывая, что функция $\Phi(x)$ соответствует (2.10), из (2.6) получим:

$$G_{3,n} = \Big[\operatorname{sh}(\tau)/\tau - 1\Big]\Big/(4\operatorname{sh}^2(\tau/2)), \quad \tau = \frac{a_0 h}{\varepsilon}. \tag{2.14}$$

Покажем, что из (2.14) следует:

$$0 < G_{3,n} < \frac{1}{6}. \tag{2.15}$$

Неравенство $G_{3,n} > 0$ очевидно, а неравенство $G_{3,n} < 1/6$ равносильно следующему:

$$2\tau\operatorname{sh}^2\frac{\tau}{2} - 3\operatorname{sh}\tau + 3\tau > 0, \quad \tau > 0.$$

В справедливости данного неравенства несложно убедиться, откуда следует (2.15).

Теперь оцениваем слагаемые в (2.13). Получим в интегральном виде погрешность формулы прямоугольников. Пусть $\Delta_n = I_n(p) - 2hp_n$. Формула центральных прямоугольников точна на многочленах первой степени, поэтому в соответствии с [10]

$$\Delta_n = \int\limits_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} F_2(t)p''(t)\,dt,$$

где

$$F_2(t) = \frac{(x_{n+1}-t)^2}{2} - 2hK_2(x_n - t),$$

где $K_2(x_n - t) = x_n - t$ при $x_n \ge t$ и $K_2(x_n - t) = 0$ иначе. Следовательно,

$$\Delta_n = \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} \Big[\frac{(x_{n+1}-t)^2}{2} - 2h(x_n - t)\Big]p''(t)\,dt + \int\limits_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{(x_{n+1}-t)^2}{2}p''(t)\,dt.$$

Несложно показать, что

$$\frac{(x_{n+1}-t)^2}{2} - 2h(x_n - t) = \frac{(t - x_{n-1})^2}{2}.$$

Следовательно,

$$|I_n(p) - 2hp_n| = |\Delta_n| \leq \frac{h^2}{2} \int\limits_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} |p''(t)|\,dt. \tag{2.16}$$

Теперь оцениваем второе слагаемое в (2.13) на основе известной оценки [8]:

$$|p_{n+1} - 2p_n + p_{n-1}| \leq h \int\limits_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} |p''(t)|\,dt. \tag{2.17}$$

Учитывая (2.15)-(2.17), из (2.13) получаем:

$$|S_{\Phi,n}(u) - I_n(u)| \leq \frac{5}{6}h^2 \int\limits_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} |p''(t)|\,dt. \tag{2.18}$$

Следовательно,

$$|S_\Phi(u) - I(u)| \leq \frac{5}{6}h^2 \int\limits_0^1 |p''(t)|\,dt. \tag{2.19}$$

Учитывая оценку (2.11) при $j = 2$, получаем:

$$|S_\Phi(u) - I(u)| \leq \frac{5}{6}h^2 \int\limits_0^1 C_0\Big[1 + \frac{1}{\varepsilon}e^{-\alpha t/\varepsilon}\Big]\,dt.$$

Интегрируя, получаем утверждение леммы.

3. Формула Симпсона на сетке Шишкина

Исследуем, как можно повысить точность составной формулы Симпсона сгущением сетки в пограничном слое. В соответствии с [5] зададим сетку:

$$\Omega = \{x_n:\ x_n = x_{n-1} + h_n,\quad n = 1, 2, \ldots, N,\quad x_0 = 0,\ x_N = 1\} \tag{3.1}$$

с шагами:

$$h_n = \frac{2\sigma}{N},\ 1 \leq n \leq \frac{N}{2};\quad h_n = \frac{2(1-\sigma)}{N},\ \frac{N}{2} < n \leq N,$$

где N кратно четырем,

$$\sigma = \min\Big\{\frac{1}{2}, \frac{4\varepsilon}{\alpha}\ln N\Big\}. \tag{3.2}$$

В силу того, что N кратно четырем, интервал $[x_{n-1}, x_{n+1}]$ при $n = 1, 3, \ldots, N-1$ находится в пограничном слое или вне его, поэтому составную формулу Симпсона на сетке (3.1) можно записать в виде:

$$S_3(u) = \sum_{n=1,2}^{N-1} S_{3,n}(u),\ S_{3,n}(u) = \frac{h_n}{3}\Big(u_{n-1} + 4u_n + u_{n+1}\Big). \tag{3.3}$$

Лемма 2. *Пусть для функции $u(x)$ справедливо представление:*

$$u(x) = q(x) + \Theta(x),\ x \in [0, 1], \tag{3.4}$$

где

$$|q^{(j)}(x)| \leq C_1,\quad |\Theta^{(j)}(x)| \leq \frac{C_1}{\varepsilon^j}\,e^{-\alpha x/\varepsilon},\ 0 \leq j \leq 4, \tag{3.5}$$

где C_1 - некоторая постоянная, не зависящая от ε. Тогда для формулы Симпсона (3.3) на сетке (3.1) для некоторой постоянной C выполнятся оценки погрешности:

при $\varepsilon < \alpha/(8\ln N)$

$$\Big|I(u) - S_3(u)| \le \frac{C}{N^4}(1 + \varepsilon \ln^5 N), \tag{3.6a}$$

при $\varepsilon \ge \alpha/(8\ln N)$

$$|I(u) - S_3(u)| \le \frac{C}{N^4} \min\Big\{\frac{1}{\varepsilon^4}, \ln^4 N\Big\}. \tag{3.6b}$$

Доказательство. Используем оценку погрешности формулы Симпсона [7]:

$$|R_n(u)| = \Big|I_n(u) - S_{3,n}(u)\Big| \le \max_{x\in[x_{n-1},x_{n+1}]} |u^{(4)}(x)|\frac{h_n^5}{90}, \tag{3.7}$$

где $I_n(u)$ соответствует (2.4), а $S_{3,n}(u)$ определено в (3.3). Учитывая, что $R_n(u) = R_n(q) + R_n(\Theta)$, оценим погрешность на составляющих $q(x)$ и $\Theta(x)$.

Сначала оценим погрешность квадратурной формулы на регулярной составляющей $q(x)$. Несложно убедиться, что при всех n $h_n < 2/N$. Учитывая первое неравенство в (3.5), из (3.7) получим:

$$|R_n(q)| \le \frac{16C_1}{45}\frac{1}{N^5}, \ n = 1, 3, \dots, N-1. \tag{3.8}$$

Теперь оценим погрешность на функции $\Theta(x)$.

Пусть в (3.2) $\sigma < 1/2$.

Пусть $n < N/2$. Учитывая (3.1), (3.5) и (3.7), получаем:

$$|R_n(\Theta)| \le C_1 \frac{8^5\varepsilon}{90\alpha^5}\frac{\ln^5 N}{N^5} \le C_2\varepsilon\frac{\ln^5 N}{N^5}. \tag{3.9}$$

Пусть $n > N/2$. Учитываем, что при $x \ge \sigma$ в соответствии с (3.2) и (3.5) справедлива оценка $|\Theta(x)| \le C_1/N^4$. Следовательно,

$$|R_n(\Theta)| \le \Big|I_n(\Theta)\Big| + \Big|S_{3,n}(\Theta)\Big| \le \frac{8C_1}{N^5}. \tag{3.10}$$

Пусть $\sigma = 1/2$. Тогда в соответствии с (3.2), (3.5), (3.7) выполнятся соотношения:

$$|R_n(\Theta)| \le \frac{C_1}{90\varepsilon^4 N^5}, \quad \varepsilon \ge \frac{\alpha}{8\ln N}.$$

Следовательно,

$$|R_n(\Theta)| \le \min\Big\{\frac{C_1}{90\varepsilon^4}\frac{1}{N^5}, \ \frac{2048C_1}{45\alpha^4}\frac{\ln^4 N}{N^5}\Big\}, \ n = 1, 3, \dots, N-1. \tag{3.11}$$

Теперь оценим $R_n(u)$, используя оценку:

$$|R_n(u)| \le |R_n(q)| + |R_n(\Theta)|.$$

Пусть $\sigma < 1/2, \ n < N/2$. Тогда в соответствии с (3.8), (3.9) для некоторой постоянной C_3 выполнится оценка

$$|R_n(u)| \le (1 + \varepsilon \ln^5 N)\frac{C_3}{N^5}. \tag{3.12}$$

Пусть $\sigma < 1/2,\ n > N/2$. В соответствии с (3.8), (3.10) для некоторой постоянной C_4 выполнится оценка

$$|R_n(u)| \le \frac{C_4}{N^5}. \qquad (3.13)$$

Пусть $\sigma = 1/2$, тогда сетка равномерна и в соответствии с (3.8), (3.11), для некоторой постоянной C_5 выполнится оценка:

$$|R_n(u)| \le \frac{C_5}{N^5} \min\Big\{\frac{1}{\varepsilon^4},\ \ln^4 N\Big\}. \qquad (3.14)$$

Используя оценки (3.12)-(3.14), для некоторой постоянной C получим требуемые оценки погрешности (3.6a), (3.6b). Лемма доказана.

Замечание 1. Поясним декомпозицию (3.4) в условиях леммы 2. В работе ([6], с. 79) показано, как для функции $u(x)$, являющейся решением задачи (1.2), можно осуществить декомпозицию (3.4), при этом оценки (3.5) обоснованы для $0 \le j \le 2$. В ([9], с. 62) приведен другой способ обоснования оценок (3.5) при $0 \le j \le 2$ и показано, как можно осуществить декомпозицию функции $u(x)$, чтобы оценки (3.5) выполнились при $j > 2$.

Замечание 2. Учитывая полученные оценки (3.6a), (3.6b), можно заключить, что при $\varepsilon \approx 1$ и при достаточно малых значениях ε погрешность формулы Ньютона-Котеса на сетке Шишкина при интегрировании функции с погранслойной составляющей по порядку такая же, как и в регулярном случае, когда производные интегрируемой функции ограничены, а сетка равномерна.

4. Численные эксперименты

Остановимся на примере:

$$I(u) = \int\limits_0^1 u(x)\,dx, \quad u(x) = \cos\frac{\pi x}{2} + e^{-(x+x^2/2)/\varepsilon}. \qquad (4.1)$$

Функция $u(x)$ из (4.1) является решением сингулярно возмущенной краевой задачи (1.2) при задании $a_1(x) = 1 + x,\ a_2(x) = 0$ и соответствующих правой части и краевых условиях. Функция $u(x)$ представима в виде (2.3) при задании

$$\Phi(x) = e^{-x/\varepsilon},\ p(x) = \cos\frac{\pi x}{2} + e^{-(x+x^2/2)/\varepsilon} - e^{-x/\varepsilon},\ \gamma = 1.$$

Тогда для $p(x)$ справедливы оценки производных (2.11). Функция $\Phi(x)$ легко интегрируема и может быть использована в (2.6) при построении квадратурной формулы.

За точное значение интеграла (4.1) принималось вычисленное значение этого интеграла по составной формуле Симпсона (2.1) при достаточно большом количестве узлов $N_0,\ \ N_0 = 10^8$, когда $\varepsilon \gg 1/N_0$. В таблицах под $e - m$ понимаем 10^{-m}.

Определим вычисленный порядок точности квадратурной формулы:

$$CR_{N,\varepsilon} = \log_2(E_{N,\varepsilon}/E_{2N,\varepsilon}),$$

где $E_{N,\varepsilon}$ - погрешность анализируемой квадратурной формулы при заданных ε и N.

В табл. 1 приведены погрешность $E_{N,\varepsilon} = |I(u) - S(u)|$ и порядок точности $CR_{N,\varepsilon}$ формулы Симпсона (2.1) на равномерной сетке в зависимости от ε

Таблица 1. Погрешность и вычисленный порядок точности формулы Симпсона (2.1) на равномерной сетке

ε	N					
	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9
1	$1.21e-7$ 4.0	$7.57e-9$ 4.0	$4.73e-10$ 4.0	$2.96e-11$ 4.0	$1.84e-12$ 4.1	$1.05e-13$ 5.6
10^{-1}	$5.91e-5$ 4.0	$3.72e-6$ 4.0	$2.33e-7$ 4.0	$1.46e-8$ 4.0	$9.10e-10$ 4.0	$5.69e-11$ 4.0
10^{-2}	$1.11e-2$ 2.3	$2.29e-3$ 3.2	$2.51e-4$ 3.7	$1.88e-5$ 4.0	$1.23e-6$ 4.0	$7.81e-8$ 4.0
10^{-3}	$1.98e-2$ 1.1	$9.42e-3$ 1.2	$4.21e-3$ 1.4	$1.61e-3$ 2.0	$4.09e-4$ 3.2	$5.46e-5$ 3.6
10^{-4}	$2.07e-2$ 1.0	$1.03e-2$ 1.0	$5.11e-3$ 1.0	$2.50e-3$ 1.1	$1.20e-3$ 1.1	$5.51e-4$ 1.3
10^{-5}	$2.08e-2$ 1.0	$1.04e-2$ 1.0	$5.20e-3$ 1.0	$2.59e-3$ 1.0	$1.29e-3$ 1.0	$6.41e-4$ 1.0

и N. Порядок точности понижается с четвертого до первого с уменьшением параметра ε.

В табл. 2 приведены погрешность и порядок точности аналога формулы Симпсона (2.7) на равномерной сетке. С уменьшением ε порядок точности понижается с четвертого до второго, что соответствует оценке (2.12).

В табл. 3 приведены погрешность и порядок точности формулы Симпсона (3.3) на сетке Шишкина (3.1). При малых значениях параметра ε выполняется оценка $3 < CR_{N,\varepsilon} < 4$, что согласуется с оценкой (3.6а).

Таблица 2. Погрешность и вычисленный порядок точности аналога формулы Симпсона (2.7) на равномерной сетке

ε	N					
	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9
1	$2.07e-7$ 4.0	$1.30e-8$ 4.0	$8.10e-10$ 4.0	$5.06e-11$ 4.0	$3.16e-12$ 4.0	$1.94e-13$ 4.0
10^{-1}	$9.52e-6$ 4.0	$7.00e-7$ 4.0	$4.55e-8$ 4.0	$2.87e-9$ 4.0	$1.80e-10$ 4.0	$1.12e-11$ 4.0
10^{-2}	$6.04e-4$ 3.5	$5.40e-5$ 4.3	$2.56e-6$ 3.7	$1.97e-7$ 3.9	$1.68e-8$ 3.9	$1.13e-9$ 4.0
10^{-3}	$9.76e-4$ 2.1	$2.32e-4$ 2.1	$5.26e-5$ 2.3	$1.07e-5$ 3.0	$1.35e-6$ 2.0	$3.28e-8$ 3.2
10^{-4}	$1.02e-3$ 2.0	$2.53e-4$ 2.0	$6.27e-5$ 2.0	$1.54e-5$ 2.1	$3.70e-6$ 2.1	$8.55e-7$ 2.2
10^{-5}	$1.02e-3$ 2.0	$2.55e-4$ 2.0	$6.38e-5$ 2.0	$1.59e-5$ 2.0	$3.96e-6$ 2.0	$9.83e-7$ 2.0

Таблица 3. Погрешность и вычисленный порядок точности формулы Симпсона (3.3) на кусочно-равномерной сетке (3.1)

ε	N					
	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9
1	$1.21e-7$ 4.0	$7.57e-9$ 4.0	$4.73e-10$ 4.0	$2.98e-11$ 4.0	$1.84e-12$ 4.1	$1.05e-13$ 5.6
10^{-1}	$5.91e-5$ 4.0	$3.72e-6$ 4.0	$2.33e-7$ 4.0	$1.46e-8$ 4.0	$9.10e-10$ 4.0	$5.69e-11$ 4.0
10^{-2}	$1.66e-4$ 2.6	$2.82e-5$ 3.4	$2.83e-6$ 2.6	$4.52e-7$ 3.2	$4.85e-8$ 3.3	$4.86e-9$ 3.4
10^{-3}	$2.21e-5$ 2.8	$3.19e-6$ 3.0	$4.11e-7$ 3.1	$4.75e-8$ 3.2	$5.05-9$ 3.3	$5.04e-10$ 3.4
10^{-4}	$7.54e-6$ 3.6	$6.33e-7$ 3.4	$6.03e-8$ 3.5	$5.93e-9$ 3.4	$5.79e-10$ 3.4	$5.50e-11$ 3.4
10^{-5}	$6.08e-6$ 4.0	$3.78e-7$ 3.9	$2.51e-8$ 3.8	$1.76e-9$ 3.8	$1.25e-10$ 3.3	$1.28e-11$ 3.4

Заключение

Исследованы квадратурные формулы с тремя узлами для интегрирования функции, соответствующей решению задачи с экспоненциальным пограничным слоем. Показано, что применение формулы Симпсона при малых значениях параметра ε приводит к погрешностям порядка $O(N^{-1})$. Доказано, что применение на равномерной сетке модифицированной квадратурной формулы, точной на погранслойной составляющей, уменьшает погрешность до величины порядка $O(N^{-2})$, а применение формулы Симпсона на сетке Шишкина приводит к понижению погрешности до величины порядка $O(N^{-4})$, с точностью до логарифмического множителя от числа узлов N. Заметим, что модифицированная формула Симпсона на равномерной сетке не зависит от вида погранслойной составляющей, а применение составной формулы Симпсона на сетке Шишкина обосновано в случае экспоненциального пограничного слоя.

Список литературы

[1] А.И. Задорин, Н.А. Задорин *Квадратурные формулы для функций с погранслойной составляющей*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **51**:11 (2011), 1952–1962. MR2933107

[2] А.И. Задорин , Н.А. Задорин *Аналог формулы Ньютона-Котеса с четырьмя узлами для функции с погранслойной составляющей*, Сиб. журн. вычисл. математики, **16**:4 (2013), 313–323.

[3] A. Zadorin, N. Zadorin *Quadrature Formula with Five Nodes for Functions with a Boundary Layer Component*, Lect. Notes in Computer Science., **8236** (2013), Springer-Verlag, Berlin, 540–546. Zbl 06223323

[4] A.I. Zadorin, N.A. Zadorin *Interpolation formula for functions with a boundary layer component and its application to derivatives calculation*, Сибирские электронные математические известия, **9** (2012), 445–455. MR3037872

[5] Г.И. Шишкин *Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений*, УрО РАН, Екатеринбург, 1992.

[6] J.J.H. Miller, E. O'Riordan , G.I. Shishkin *Fitted Numerical Methods for Singular Perturbation Problems: Error Estimates in the Maximum Norm for Linear Problems in One and Two Dimensions (Revised Edition)*, World Scientific Publishing, Singapore, 2012. MR2978532

[7] Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков *Численные методы*, Наука, Москва, 1987.
[8] R.B. Kellogg, A. Tsan *Analysis of some difference approximations for a singular perturbation problems without turning points*, Math. Comput, **32** (1978), 1025–1039. MR0483484
[9] T. Lins *Layer-Adapted Meshes for Reaction-Convection-Diffusion Problems*, series Lecture Notes in Mathematics, **1985** , Springer, Berlin, 2010.
[10] С.М. Никольский *Квадратурные формулы*, Наука, Москва, 1974.

Александр Иванович Задорин
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
Певцова, 13,
644043, Омск, Россия
E-mail address: zadorin@ofim.oscsbras.ru

Никита Александрович Задорин
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
Певцова, 13,
644043, Омск, Россия
E-mail address: nik-zadorin@yandex.ru