Сибирский журнал
индустриальной математики
Январь-март, 2013. Том XVI, № 1(53)

УДК 519.62

ДВУХСЕТОЧНЫЙ МЕТОД ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НА СЕТКЕ ШИШКИНА*)

А. И. Задорин, С. В. Тиховская

Рассматривается краевая задача для нелинейного сингулярно возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Применяется схема направленных разностей на сетке Шишкина. Для нахождения решения разностной схемы используются методы Ньютона и Пикара, для уменьшения количества арифметических действий используется двухсеточный метод. Показано, что применение экстраполяции Ричардсона обеспечивает повышение точности разностной схемы почти до второго порядка. Приводятся результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: нелинейное дифференциальное уравнение, сингулярное возмущение, сетка Шишкина, нелинейная разностная схема, итерационный метод, двухсеточный метод, экстраполяция Ричардсона.

Рассматривается краевая задача для нелинейного уравнения типа конвекция-диффузия с малым коэффициентом диффузии. При численном решении такой задачи от разностной схемы требуется свойство сходимости, равномерной по малому параметру. Как известно, добиться равномерной сходимости разностной схемы можно либо за счет подгонки разностной схемы к погранслойной составляющей [1], либо сгущением сетки в пограничном слое [2–4].

В обоих случаях разностная схема представляет собой систему нелинейных уравнений, которая решается на основе итераций. Можно сэкономить в количестве арифметических действий при разрешении разностной схемы, применяя многосеточный метод [5, 6]. В данной работе остановимся на двухсеточном методе. Двухсеточные методы исследовались в ряде работ, например в [7, 8]. Двухсеточный метод предполагает предварительное решение краевой задачи на достаточно грубой сетке с последующей интерполяцией найденного сеточного решения в узлы исходной сетки. Если принять сеточное решение, полученное в результате интерполяции, за начальное приближение итерационного метода, то это приводит к уменьшению необходимого количества итераций на исходной сетке.

В [9] двухсеточный метод применен к решению сингулярно возмущенной краевой задачи. Рассмотрен случай, когда для решения исходной задачи на равномерной сетке используется схема Ильина [1]. Показано, что при $h = H^2$, где h и H — шаги исходной и вспомогательной сеток, требуется только одна итерация метода Ньютона на исходной сетке. При этом используется неполиномиальная интерполяция сеточного решения с грубой сетки на исходную, точная на погранслойной составляющей [10].

В данной работе двухсеточный метод исследуется в случае, когда равномерная сходимость разностной схемы обеспечена сгущением сетки в пограничном слое. Для этого используется сетка Шишкина [3].

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 13–01–00618, 11–01–00875) и ОМН РАН (проект 3.2.2012).

При применении двухсеточного метода решение разностной схемы известно на двух сетках, что предлагается использовать для повышения точности схемы на основе метода экстраполяции Ричардсона, исследуемого, например, в [11, 12].

Под C и C_i будем подразумевать положительные постоянные, не зависящие от ε и числа узлов сетки. Определим норму сеточной функции: $\|u^N\|_N = \max\limits_{i=1,\ldots,N} |u_i^N|$.

1. Предварительный анализ. Рассмотрим краевую задачу

$$\varepsilon u''(x) + a(x)u'(x) = f(x,u), \quad x \in \Omega = (0,1), \quad u(0) = A, \quad u(1) = B, \tag{1.1}$$

где функции $a(x)$, $f(x,u)$ достаточно гладкие и выполняются условия

$$\varepsilon \in (0,1], \quad a(x) \geq \alpha > 0, \quad f'_u(x,u) \geq 0 \text{ на } \Omega \times R. \tag{1.2}$$

Известно, что решение задачи (1.1) при выполнении условий (1.2) имеет погранслойный рост у левой границы исходного интервала. Разностные схемы для задачи вида (1.1) исследовались, например, в [13, 14].

В соответствии с [3] зададим сетку

$$S_{N,\sigma} = \{x_i : x_i = x_{i-1} + h_{i,N},\, x_0 = 0,\, x_N = 1,\, i = 1, 2, \ldots, N\}, \tag{1.3}$$

где

$$h_{i,N} = 2\sigma/N = h_N, \quad 1 \leq i \leq N/2;$$
$$h_{i,N} = \frac{2(1-\sigma)}{N} = H_N, \quad \frac{N}{2} < i \leq N,\ \sigma = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{2\varepsilon}{\alpha}\ln N\right\}.$$

На сетке $S_{N,\sigma}$ для задачи (1.1) выпишем схему направленных разностей:

$$\mathfrak{L}_i^N u^N = \varepsilon\lambda_{xx}^N u_i^N + a_i\lambda_x^N u_i^N = f\big(x_i, u_i^N\big),\ 0 < i < N,\ u_0^N = A,\ u_N^N = B, \tag{1.4}$$

где

$$a_i = a(x_i), \quad \lambda_x^N u_i^N = \frac{u_{i+1}^N - u_i^N}{h_{i+1,N}},$$
$$\lambda_{xx}^N u_i^N = \frac{(u_{i+1}^N - u_i^N)/h_{i+1,N} - (u_i^N - u_{i-1}^N)/h_{i,N}}{(h_{i,N} + h_{i+1,N})/2}.$$

Согласно [15] имеет место оценка погрешности схемы (1.4):

$$\max_{0\leq i\leq N} \big|u(x_i) - u_i^N\big| \leq C_0\frac{\ln N}{N}. \tag{1.5}$$

2. Описание двухсеточного метода. Схема (1.4) представляет собой нелинейную систему алгебраических уравнений и ее решение может быть найдено на основе итераций. Остановимся на случае линеаризации Ньютона:

$$\begin{gathered}\varepsilon\lambda_{xx}^N u_i^{(m+1)} + a_i\lambda_x^N u_i^{(m+1)} - f\big(x_i, u_i^{(m)}\big) - f'_u\big(x_i, u_i^{(m)}\big)\big(u_i^{(m+1)} - u_i^{(m)}\big) = 0,\\ 0 < i < N, \quad u_0^{(m+1)} = A, \quad u_N^{(m+1)} = B, \quad m \geq 0.\end{gathered} \tag{2.1}$$

Несложно получить оценку скорости сходимости метода Ньютона:

$$\|u^{(m)} - u^N\|_N \leq \alpha\theta^{-1}(\alpha^{-1}\theta\delta)^{2^m}, \quad m \geq 0, \tag{2.2}$$

где
$$\theta = \max_{x\in\bar{\Omega},\, |\xi|\le L+\delta} \left|f''_{uu}(x,\xi)\right|, \quad \|u^N\|_N \le L, \quad \delta = \|u^N - u^{(0)}\|_N.$$

Метод Ньютона (2.1) квадратично сходится, если $\alpha^{-1}\theta\delta < 1$. Учитывая оценку погрешности (1.5) схемы (1.4), заключаем, что итерации необходимо продолжать до достижения неравенства:
$$\|u^{(m_N)} - u^N\|_N \le \Delta_N, \quad \Delta_N = \ln N/N. \tag{2.3}$$

Учитывая оценку (2.2), получаем, что для выполнения условия (2.3) потребуется число итераций:
$$m_N \ge \log_2 \frac{\ln(\alpha^{-1}\theta\Delta_N)}{\ln(\alpha^{-1}\theta\delta)}. \tag{2.4}$$
На каждой итерации линейная задача (2.1) может быть разрешена методом прогонки, при этом число арифметических действий пропорционально числу неизвестных. Пусть dN — количество арифметических действий, необходимое для выполнения одной итерации. Тогда для осуществления итераций с выполнением условия (2.4) потребуется количество арифметических действий:
$$M_N \approx dN \log_2 \frac{\ln(\alpha^{-1}\theta\Delta_N)}{\ln(\alpha^{-1}\theta\delta)}. \tag{2.5}$$

Проведем анализ, как можно сократить количество арифметических действий, применяя двухсеточный метод. Пусть $S_{n,\sigma}$ — вспомогательная сетка Шишкина, содержащая значительно меньшее число узлов $n \ll N$, чем исходная $S_{N,\sigma}$, но с тем же параметром σ. Сначала решаем задачу (1.1) на сетке $S_{n,\sigma}$ с использованием разностной схемы, соответствующей (1.4). Схему разрешаем на основе метода Ньютона по аналогии с (2.1). Итерации заканчиваем, если выполнено неравенство
$$\|u^{(m_n)} - u^n\|_n \le \Delta_n, \quad \Delta_n = \ln n/n. \tag{2.6}$$

Далее, найденное на сетке $S_{n,\sigma}$ решение $u^{(m_n)}$ интерполируем в узлы исходной сетки $S_{N,\sigma}$, используя формулу линейной интерполяции
$$\begin{gathered} I_{n,\sigma}(u^{(m_n)}, x) = u_{i-1}^{(m_n)} + \frac{u_i^{(m_n)} - u_{i-1}^{(m_n)}}{h_{i,n}}(x - X_{i-1}), \\ X_{i-1} \le x \le X_i, \quad 1 \le i \le n, \end{gathered} \tag{2.7}$$

где X_i — узлы сетки $S_{n,\sigma}$.

На сетке Шишкина формула линейной интерполяции является равномерно точной в соответствии со следующей леммой.

Лемма 1 [16]**.** *Для формулы линейной интерполяции* (2.7) *на сетке* $S_{n,\sigma}$ *справедливы оценки погрешности*
$$|u(x) - I_{n,\sigma}([u]_{S_{n,\sigma}}, x)| \le C_1 \frac{\ln^2 n}{n^2},\ x \in [0,\sigma], \quad |u(x) - I([u]_{S_{n,\sigma}}, x)| \le \frac{C_1}{n^2},\ x \in (\sigma, 1],$$
где $[u]_{S_{n,\sigma}}$ *— проекция функции* $u(x)$ *на сетку* $S_{n,\sigma}$.

Кроме того, формула линейной интерполяции является устойчивой:
$$|I_{n,\sigma}([u]_{S_{n,\sigma}}, x) - I_{n,\sigma}(u^{(m_n)}, x)| \le \|[u]_{S_{n,\sigma}} - u^{(m_n)}\|_n, \quad x \in [0,1]. \tag{2.8}$$

Учитывая (1.5), (2.6), (2.8) и лемму 1, несложно показать, что для некоторой постоянной C_2 выполнится оценка

$$\|[I_{n,\sigma}(u^{(m_n)},x)]_{S_{N,\sigma}} - u^N\|_N \le C_2 \frac{\ln n}{n}.$$

Таким образом, на основе решения задачи (1.1) на вспомогательной сетке $S_{n,\sigma}$ и интерполяции решение разностной схемы (1.4) может быть найдено с погрешностью порядка $O(\ln n/n)$. Используя это приближение в качестве начальной итерации метода Ньютона (2.1), можно уменьшить необходимое количество итераций для нахождения решения схемы (1.4) с точностью $O(\ln N/N)$.

Оценим количество арифметических действий, которые необходимо выполнить для нахождения решения схемы (1.4) с использованием двухсеточного метода:

$$M_{nN} \approx dn \log_2 \frac{\ln(\alpha^{-1}\theta\Delta_n)}{\ln(\alpha^{-1}\theta\delta)} + dN \log_2 \frac{\ln(\alpha^{-1}\theta\Delta_N)}{\ln(\alpha^{-1}\theta\Delta_n)} + I_n, \tag{2.9}$$

где I_n — количество арифметических действий, необходимое для интерполяции сеточного решения с вспомогательной сетки на исходную.

Учитывая (2.5) и (2.9), можно оценить выигрыш в необходимом количестве арифметических действий при использовании двухсеточного метода:

$$M_N - M_{nN} \approx d(N-n) \log_2 \frac{\ln(\alpha^{-1}\theta\Delta_n)}{\ln(\alpha^{-1}\theta\delta)} - I_n.$$

Аналогичным образом двухсеточный метод для нахождения решения схемы (1.4) может быть применен в случае итераций Пикара:

$$\varepsilon\lambda^N_{xx} u_i^{(m+1)} + a_i \lambda^N_x u_i^{(m+1)} - \beta u_i^{(m+1)} = f(x_i, u_i^{(m)}) - \beta u_i^{(m)}, \quad 0 < i < N,$$
$$u_0^{(m+1)} = A, \quad u_N^{(m+1)} = B.$$

В случае метода Пикара предполагается, что

$$\beta \ge f'_u(x,u) \ge \gamma > 0 \text{ на } \Omega \times R.$$

Тогда по аналогии со случаем метода Ньютона получим выигрыш в количестве арифметических действий при использовании двухсеточного метода:

$$M_N - M_{nN} \approx d(N-n) \frac{\ln(\Delta_n/\delta)}{\ln(1-\gamma/\beta)} - I_n.$$

3. Метод Ричардсона. При применении двухсеточного метода решение разностной схемы известно на сетках $S_{n,\sigma}$ и $S_{N,\sigma}$, что можно использовать для повышения точности разностной схемы на основе метода экстраполяции Ричардсона. При исследовании двухсеточного метода предполагаем, что $N = kn$, где k — целое число. Представляет интерес анализ точности метода экстраполяции Ричардсона в зависимости от k.

В [17] исследована точность метода Ричардсона на сетке Шишкина в случае линейной задачи. Предполагается, что вспомогательная сетка Шишкина имеет то же значение параметра σ, что и исходная сетка, при этом содержит вдвое большее количество сеточных интервалов. В данной работе при использовании двухсеточного метода вспомогательная сетка в отличие от [17] является более редкой, чем исходная. Для рассматриваемых сеток выполнены соотношения

$$S_{n,\sigma} = \{X_i,\, i = 0,1,\dots,n\}, \quad S_{n,\sigma} \subset S_{N,\sigma}, \quad S_{N,\sigma} = \{x_i,\, i = 0,1,\dots,N\}.$$

Далее будем предполагать, что C и C_i не зависят от ε, n, N и k.

При анализе точности метода Ричардсона будут использоваться некоторые результаты из [17], поэтому остановимся на случае линейной задачи:

$$Lu(x) = \varepsilon u''(x) + a(x)u'(x) - b(x)u(x) = g(x),\ x \in \Omega = (0,1),\qquad u(0) = A,\ u(1) = B, \tag{3.1}$$

где $b(x) \geq 0$, функции $b(x)$, $g(x)$ достаточно гладкие. Тогда схема (1.4) примет вид

$$L_i^N u^N = \varepsilon\lambda_{xx}^N u_i^N + a_i\lambda_x^N u_i^N - b(x_i)u_i^N = g(x_i), \quad 0 < i < N, \qquad u_0^N = A, \quad u_N^N = B. \tag{3.2}$$

Пусть

$$k_n = -\frac{n}{N-n} = -\frac{1}{k-1}, \quad k_N = \frac{N}{N-n} = \frac{k}{k-1}.$$

На основе экстраполяции Ричардсона на сетке $S_{N,\sigma}$ построим сеточное решение задачи (3.1), которое обозначим как u^{nN}, используя решение схемы (3.2) на сетках $S_{N,\sigma}$ и $S_{n,\sigma}$. Сначала зададим эту функцию в узлах вспомогательной сетки $S_{n,\sigma}$:

$$u^{nN}(X_j) = k_n u^n(X_j) + k_N u^N(X_j), \quad X_j \in S_{n,\sigma}.$$

В узлах x_i исходной сетки $S_{N,\sigma}$, не совпадающих с узлами сетки $S_{n,\sigma}$, зададим u^{nN}, используя формулу линейной интерполяции. Тогда для каждого узла $x_i \in S_{N,\sigma}$ из некоторого сеточного интервала (X_{j-1}, X_j) получим

$$u^{nN}(x_i) = I_{n,\sigma}([u^{nN}]_{S_{n,\sigma}}, x_i) = \varkappa_{j-1}^i u^{nN}(X_{j-1}) + \varkappa_j^i u^{nN}(X_j),$$

где $\varkappa_{j-1}^i = (X_j - x_i)/(X_j - X_{j-1})$, $\varkappa_j^i = (x_i - X_{j-1})/(X_j - X_{j-1})$.

Для анализа погрешности построенного сеточного решения u^{nN} будем использовать декомпозицию [4, 12, 17] решения задачи (3.1) в виде суммы регулярной и погранслойной составляющих $u(x) = v(x) + w(x)$, где функции $v(x)$ и $w(x)$ имеют следующие оценки производных:

$$|v^{(k)}(x)| \leq C(1 + \varepsilon^{3-k}e^{-\alpha x/\varepsilon}), \quad x \in [0,\,1],\ 0 \leq k \leq 4,$$
$$|w^{(k)}(x)| \leq C\varepsilon^{-k}e^{-\alpha x/\varepsilon}, \quad x \in [0,\,1],\ 0 \leq k \leq 7,$$

при этом функции $v(x)$ и $w(x)$ являются решением задач

$$Lv(x) = g(x), \quad x \in \Omega, \quad v(0) = A - w(0), \quad v(1) = B - w(1),$$
$$Lw(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad |w(0)| \leq C, \quad w(1) = w(0)e^{-\alpha/\varepsilon},$$

для некоторой постоянной C, где L соответствует (3.1).

Аналогично осуществим декомпозицию решения схемы (3.2) на сетке $S_{N,\sigma}$ в виде $u^N = v^N + w^N$, где v^N, w^N являются решениями задач

$$L_i^N v^N = g(x_i),\ 0 < i < N, \quad v_0^N = v(0),\ v_N^N = v(1),$$
$$L_i^N w^N = 0,\ 0 < i < N, \quad w_0^N = w(0),\ w_N^N = w(1).$$

Определим декомпозицию решения схемы (3.2) на сетке $S_{n,\sigma}$ как $u^n = v^n + w^n$.

Пусть $\zeta(x) = -a(x)v''(x)/2$ при $x \in [0,\,1]$. Тогда имеет место следующая

Лемма 2. *Пусть* $\varepsilon \le N^{-1}$. *Тогда*

$$L_i^n(v^n - [v]_{S_{n,\sigma}}) = \zeta(X_i)h_{i+1,n} + K_{1,i}H_n^2, \quad X_i \in S_{n,\sigma},$$
$$L_i^N(v^N - [v]_{S_{N,\sigma}}) = \zeta(x_i)h_{i+1,N} + K_{1,i}H_N^2, \quad x_i \in S_{N,\sigma},$$

где $|K_{1,i}| \le C_3$, *а* L^N *соответствует* (3.2).

Доказательство. Используя разложение в ряд Тейлора и учитывая, что $\varepsilon \le N^{-1} \le H_N$, получим

$$\begin{aligned}L_i^N(v^N - [v]_{S_{N,\sigma}}) = (\varepsilon v''(x_i) + a_i v'(x_i) - b_i v_i) - \big(\varepsilon\lambda_{xx}^N v_i + a_i\lambda_x^N v_i - b_i v_i\big)\\ = \zeta(x_i)h_{i+1,N}\\ - \left(\frac{\varepsilon}{3}\left(\frac{h_{i+1,N}^2}{h_{i,N}+h_{i+1,N}}v'''(\xi_1) - \frac{h_{i,N}^2}{h_{i,N}+h_{i+1,N}}v'''(\xi_2)\right) + a_i\frac{h_{i+1,N}^2}{6}v'''(\xi_1)\right)\\ = \zeta(x_i)h_{i+1,N} + K_{1,i}H_N^2, \quad x_i \in S_{N,\sigma},\end{aligned}$$

где $\xi_1 \in [v_i, v_{i+1}]$ и $\xi_2 \in [v_{i-1}, v_i]$, при этом под принадлежностью величины интервалу подразумеваем, что эта величина находится в заданных границах, чтобы не писать более сложные логические условия, а $|K_{1,i}| \le C_3$, что доказывает лемму.

Определим функцию $E(x)$ как решение следующей задачи:

$$LE(x) = \zeta(x),\ x \in (0,\,1), \quad E(0) = E(1) = 0.$$

В соответствии с [17] справедлива

Лемма 3. *Пусть* $\varepsilon \le N^{-1}$. *Тогда для любого* $x_i \in S_{N,\sigma} \cap [\sigma, 1]$

$$v_i^N - v(x_i) = H_N E(x_i) + K_{2,i}N^{-2},$$

где $|K_{2,i}| \le C_3$.

Используя леммы 2, 3, докажем следующие три леммы.

Лемма 4. *Пусть* $\varepsilon \le N^{-1}$. *Тогда для любого* $X_i \in S_{n,\sigma} \cap [\sigma, 1]$ *выполнено*

$$|v(X_i) - v^{nN}(X_i)| \le C_3\frac{k}{N^2},$$

где $v^{nN}(X_i) = k_n v^n(X_i) + k_N v^N(X_i)$.

Доказательство. Из леммы 3 следует, что

$$v^n(X_i) - v(X_i) = H_n E(X_i) + K_{2,i}n^{-2} = kH_N E(X_i) + K_{2,i}k^2N^{-2},$$
$$v^N(X_i) - v(X_i) = H_N E(X_i) + K_{2,i}N^{-2}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}v(X_i) - v^{nN}(X_i) = -k_n(v^n(X_i) - v(X_i)) - k_N(v^N(X_i) - v(X_i))\\ = -(k_N + k_n k)H_N E(X_i) - K_{2,i}(k_N + k_n k^2)N^{-2} = K_{2,i}kN^{-2},\end{aligned}$$

что доказывает лемму.

Лемма 5. *Пусть* $\varepsilon \le N^{-1}$. *Тогда для любого* $X_i \in S_{n,\sigma} \cap [0, \sigma]$

$$|v(X_i) - v^{nN}(X_i)| \le C_4 \frac{k}{N^2}.$$

Доказательство. Будем проводить доказательство на основе принципа максимума. Из леммы 2 следует

$$L_i^n v^n - L^n v(X_i) = \zeta(X_i) h_n + K_{1,i} H_n^2 = k\zeta(X_i) h_N + K_{1,i} k^2 H_N^2.$$

В соответствии с [17, с. 322] справедливо соотношение $L_i^n v^N - L^n v(X_i) = \zeta(X_i) h_N + K_{1,i} H_N^2$. Тогда выполняется

$$L^n v(X_i) - L_i^n v^{nN} = k_n \big(L^n v(X_i) - L_i^n v^n\big) + k_N \big(L^n v(X_i) - L_i^n v^N\big) = K_{1,i} k H_N^2. \quad (3.3)$$

Несложно показать, что

$$v(0) - v^{nN}(0) = 0, \quad (3.4)$$

а из леммы 4 получаем

$$|v(\sigma) - v^{nN}(\sigma)| \le C_3 \frac{k}{N^2}. \quad (3.5)$$

Зададим $\Psi_i^n = C_4 k N^{-2}(2 - X_i) \pm (v(X_i) - v^{nN}(X_i))$. Учитывая (3.4), (3.5), получим, что

$$\Psi_0^n = 2C_4 \frac{k}{N^2} \geqslant 0, \quad \Psi_{n/2}^n = C_4(2-\sigma)\frac{k}{N^2} \pm C_3 \frac{k}{N^2} \ge 0$$

при $C_4 \ge C_3$. Учитывая (3.3), получим

$$L_i^n \Psi^n = -C_4 \frac{k}{N^2}(b_i(2 - X_i) + a_i) \pm L_i^n(v^n - v^{nN})$$
$$\le -C_4 \frac{\alpha k}{N^2} + 4(1-\sigma)^2 C_3 \frac{k}{N^2} \le 0, \quad 0 < i < n/2,$$

если $C_4 \ge 4C_3/\alpha$.

В силу принципа максимума $\Psi_i^n \ge 0$ при всех $i = 0, \ldots, n/2$, что доказывает лемму.

Лемма 6. *Существует* C_5 *такое, что для любого* $X_i \in S_{n,\sigma} \cap [\sigma, 1]$ *справедливо*

$$|w(X_i) - w^{nN}(X_i))| \le k \frac{C_5}{N^2},$$

где $w^{nN}(X_i) = k_n w^n(X_i) + k_N w^N(X_i)$.

Доказательство. Из [17] следует, что

$$|w(X_i) - w^n(X_i)| \le C_6/n^2, \quad |w(X_i) - w^N(X_i)| \le C_6/N^2.$$

Следовательно,

$$|w(X_i) - w^{nN}(X_i)| = |k_n(w(X_i) - w^n(X_i)) + k_N(w(X_i) - w^N(X_i))|$$
$$\le (|k_n| k^2 + |k_N|) \frac{C_6}{N^2} \le 3k \frac{C_6}{N^2}.$$

что доказывает лемму.

Определим функцию $F(x)$ как решение задачи

$$LF(x) = -\frac{2}{\alpha} \varepsilon a(x) w''(x), \ x \in (0, \sigma), \quad F(0) = 0, \quad F(\sigma) = w^N(\sigma) - w(\sigma).$$

В соответствии с [17] справедлива следующая

Лемма 7. *Для любого $x_i \in S_{N,\,\sigma} \cap [0,\,\sigma]$ справедливо представление*

$$w_i^N - w(x_i) = N^{-1} \ln N F(x_i) + K_{3,i} N^{-2} \ln^2 N,$$

где $|K_{3,i}| \le C_3$.

Лемма 8. *Для любого $X_i \in S_{n,\sigma} \cap [0, \sigma]$ справедливо неравенство*

$$|w(X_i) - w^{nN}(X_i)| \le C_3 k \frac{\ln^2 N}{N^2}.$$

Доказательство. Из леммы 7 следует, что

$$w_i^N - w(X_i) = N^{-1} \ln N F(X_i) + K_{3,i} N^{-2} \ln^2 N.$$

Из определения σ следует, что $\ln N = \alpha\sigma/(2\varepsilon)$. Тогда

$$w_i^N - w(X_i) = \frac{\alpha\sigma}{2\varepsilon} \frac{1}{N} F(X_i) + K_{3,i} \left(\frac{\alpha\sigma}{2\varepsilon}\right)^2 \frac{1}{N^2},$$

$$w_i^n - w(X_i) = \frac{\alpha\sigma}{2\varepsilon} \frac{1}{n} F(X_i) + K_{3,i} \left(\frac{\alpha\sigma}{2\varepsilon}\right)^2 \frac{1}{n^2} = \frac{k}{N} \frac{\alpha\sigma}{2\varepsilon} F(X_i) + K_{3,i}\, k^2 \left(\frac{\alpha\sigma}{2\varepsilon}\right)^2 \frac{1}{N^2}.$$

Следовательно,

$$w(X_i) - w^{nN}(X_i) = -k_n \big(w_i^n - w(X_i)\big) - k_N \big(w_i^N - w(X_i)\big) = K_{3,i}\, k\, N^{-2} \ln^2 N,$$

что доказывает лемму.

Теорема 1. *Пусть $\varepsilon \le N^{-1}$. Тогда существует постоянная C такая, что для любого $x_i \in\ S_{N,\sigma}$ выполнено*

$$|u(x_i) - u^{nN}(x_i)| \le C k \frac{\ln^2 N}{N^2}. \qquad (3.6)$$

Доказательство. Для любого i имеет место представление

$$u(x_i) - u^{nN}(x_i) = (v(x_i) - v^{nN}(x_i)) + (w(x_i) - w^{nN}(x_i)).$$

Утверждение теоремы для узлов $x_i \in S_{n,\sigma}$ следует из лемм 4–6 и 8.

Пусть $x_i \in (X_{j-1}, X_j)$ для некоторого j. Используя лемму 1 и учитывая, что требуемая оценка доказана для узлов сетки $S_{n,\sigma}$, получим

$$\begin{aligned}|u(x_i) - u^{nN}(x_i)| &= \big|\varkappa_{j-1}^i (u(X_{j-1}) - u^{nN}(X_{j-1})) + \varkappa_j^i (u(X_j) - u^{nN}(X_j)) \\ &\quad + u(x_i) - \big(\varkappa_{j-1}^i u(X_{j-1}) + \varkappa_j^i u(X_j)\big)\big| \le \varkappa_{j-1}^i |u(X_{j-1}) - u^{nN}(X_{j-1})| \\ &\quad + \varkappa_j^i |u(X_j) - u^{nN}(X_j)| + C_1 \frac{\ln^2 N}{N^2} \le C k \frac{\ln^2 N}{N^2},\end{aligned}$$

что доказывает теорему.

В соответствии с оценкой (3.6) погрешность метода экстраполяции Ричардсона увеличивается с ростом $k = N/n$ и, следовательно, будет наименьшей при $k = 2$.

Модификация экстраполяционной формулы. Сеточную функцию u^{nN} в произвольном узле $x_i \in S_{N,\sigma}$ для некоторого j можно записать в виде

$$u^{nN}(x_i) = I_{n,\sigma}([u^{nN}]_{S_{n,\sigma}}, x_i) = \varkappa^i_{j-1} u^{nN}(X_{j-1}) + \varkappa^i_j u^{nN}(X_j) \\ = k_n I_{n,\sigma}(u^n, x_i) + k_N I_{n,\sigma}([u^N]_{S_{n,\sigma}}, x_i).$$

В таком виде интерполяция $I_{n,\sigma}([u^N]_{S_{n,\sigma}}, x_i)$ выглядит излишней, так как известны значения $u^N(x_i)$. Поэтому для уменьшения количества арифметических действий экстраполяционную формулу можно задать следующим образом:

$$\mathfrak{U}^{nN}(x_i) = k_n I_{n,\sigma}(u^n, x_i) + k_N u^N(x_i). \tag{3.7}$$

Численные эксперименты показали, что формула (3.7) дает такой же порядок точности, что и исследуемая выше экстраполяционная формула.

4. Результаты численных экспериментов. Рассмотрим краевую задачу

$$\varepsilon u'' + u' - ue^u - g(x) = 0, \quad u(0) = A, \quad u(1) = B, \tag{4.1}$$

где A, B, $g(x)$ соответствуют решению $u(x) = e^{-x/\varepsilon} + 1/(x+1)$.

В соответствии с (4.1) зададим σ в (1.3), используя значение $\alpha = 1$.

Решение задачи (4.1) находим на основе схемы (1.4) с применением итерационных методов Ньютона и Пикара для ее реализации.

Начальное приближение для итераций задаем на основе линейной интерполяции заданных краевых условий. Итерационный метод для нахождения решения схемы (1.4) завершаем, если выполнено условие

$$\max_{0<i<N} \left| \mathfrak{L}^N_i u^{(m_N)} - f(x_i, u^{(m_N)}_i) \right| \le \alpha \Delta_N.$$

Тогда в силу оценки устойчивости

$$\|u^{(m_N)} - u^N\|_N \le \frac{1}{\alpha} \max_{0<i<N} \left| \mathfrak{L}^N_i u^{(m_N)} - f(x_i, u^{(m_N)}_i) \right|$$

будет справедлива оценка (2.3).

В табл. 1 приведены результаты вычислений в случае метода Ньютона при $\varepsilon = 10^{-2}$. В верхней части таблицы при различных значениях N и n указано количество итераций двухсеточного метода на исходной сетке, при этом в скобках приведено количество итераций на вспомогательной сетке. В нижней строке указано число итераций односеточного метода в зависимости от N. В нижней части таблицы при различных значениях N и n приведена норма погрешности схемы (1.4) при реализации ее двухсеточным методом с использованием экстраполяции Ричардсона. В нижней строке приведена норма погрешности схемы (1.4) в случае односеточного метода в зависимости от N.

Результаты численных экспериментов в случае метода Пикара при $\varepsilon = 10^{-2}$ и $\beta = 9$ приведены в табл. 2 по аналогии с табл. 1.

Результаты численных экспериментов в случае метода Ньютона при $\varepsilon = 10^{-5}$ приведены в табл. 3.

Результаты численных экспериментов в случае метода Пикара при $\varepsilon = 10^{-5}$ и $\beta = 9$ приведены в табл. 4.

В табл. 5 приведена скорость сходимости схемы (1.4) в зависимости от ε и N при ее реализации односеточным методом Ньютона:

$$CR = \log_2 \frac{D_N}{D_{2N}}, \quad D_N = \|u^N - [u]_{S_{N,\sigma}}\|.$$

В последней строке табл. 5 приведена теоретическая оценка скорости сходимости CR_t схемы (1.4) в зависимости от N, соответствующая оценке погрешности (1.5).

В табл. 6 приведена скорость сходимости схемы (1.4) в зависимости от ε и N при ее реализации двухсеточным методом Ньютона с использованием экстраполяции Ричардсона при $n = N/2$. В последней строке табл. 6 приведена теоретическая оценка скорости сходимости CR_t схемы (1.4) с экстраполяцией Ричардсона в зависимости от N, соответствующая полученной оценке (3.6).

Из результатов вычислений следует, что применение двухсеточного метода приводит к существенному сокращению количества итераций на исходной сетке, и, следовательно, к выигрышу в необходимом количестве арифметических действий. Использование метода Ричардсона в двухсеточном методе, практически без дополнительных вычислительных затрат, приводит к повышению точности разностной схемы почти до второго порядка при $n = N/2$.

Таблица 1

Количество итераций (вверху) и норма погрешности (внизу) в случаях односеточного и двухсеточного методов Ньютона, $\varepsilon = 10^{-2}$

n	N				
	128	512	2048	8192	32768
64	1(3)	2(3)	2(3)	2(3)	2(3)
128		1(3)	2(3)	2(3)	2(3)
256		1(4)	1(4)	2(4)	2(4)
512			1(4)	1(4)	2(4)
1024			1(4)	1(4)	1(4)
2048				1(4)	1(4)
4096				1(4)	1(4)
16384					1(4)
	3	4	4	4	4

n	N				
	128	512	2048	8192	32768
64	$1,08 \cdot 10^{-2}$	$1,62 \cdot 10^{-2}$	$2,27 \cdot 10^{-2}$	$3,03 \cdot 10^{-2}$	$3,86 \cdot 10^{-2}$
128		$4,46 \cdot 10^{-3}$	$6,38 \cdot 10^{-3}$	$8,66 \cdot 10^{-3}$	$1,13 \cdot 10^{-2}$
256		$1,19 \cdot 10^{-3}$	$1,70 \cdot 10^{-3}$	$2,32 \cdot 10^{-3}$	$3,05 \cdot 10^{-3}$
512			$4,38 \cdot 10^{-4}$	$6,02 \cdot 10^{-4}$	$7,93 \cdot 10^{-4}$
1024			$1,12 \cdot 10^{-4}$	$1,53 \cdot 10^{-4}$	$2,02 \cdot 10^{-4}$
2048				$3,86 \cdot 10^{-5}$	$5,11 \cdot 10^{-5}$
4096				$9,75 \cdot 10^{-6}$	$1,28 \cdot 10^{-5}$
16384					$8,05 \cdot 10^{-7}$
	$2,55 \cdot 10^{-2}$	$8,09 \cdot 10^{-3}$	$2,49 \cdot 10^{-3}$	$7,38 \cdot 10^{-4}$	$2,13 \cdot 10^{-4}$

Т а б л и ц а 2

Количество итераций (вверху) и норма погрешности (внизу) в случаях односеточного и двухсеточного методов Пикара, $\varepsilon = 10^{-2}$

n	N				
	128	512	2048	8192	32768
64	2(9)	3(9)	5(9)	7(9)	8(9)
128		3(9)	4(9)	6(9)	7(9)
256		2(10)	3(10)	5(10)	6(10)
512			3(11)	4(11)	5(11)
1024			2(11)	3(11)	5(11)
2048				3(12)	4(12)
4096				2(13)	3(13)
16384					2(14)
	9	11	12	13	15

n	N				
	128	512	2048	8192	32768
64	$1,10 \cdot 10^{-2}$	$1,62 \cdot 10^{-2}$	$2,27 \cdot 10^{-2}$	$3,03 \cdot 10^{-2}$	$3,86 \cdot 10^{-2}$
128		$4,50 \cdot 10^{-3}$	$6,39 \cdot 10^{-3}$	$8,66 \cdot 10^{-3}$	$1,13 \cdot 10^{-2}$
256		$1,19 \cdot 10^{-3}$	$1,70 \cdot 10^{-3}$	$2,32 \cdot 10^{-3}$	$3,05 \cdot 10^{-3}$
512			$4,38 \cdot 10^{-4}$	$6,01 \cdot 10^{-4}$	$7,94 \cdot 10^{-4}$
1024			$1,10 \cdot 10^{-4}$	$1,53 \cdot 10^{-4}$	$2,02 \cdot 10^{-4}$
2048				$3,85 \cdot 10^{-5}$	$5,11 \cdot 10^{-5}$
4096				$9,83 \cdot 10^{-6}$	$1,29 \cdot 10^{-5}$
16384					$4,89 \cdot 10^{-6}$
	$2,49 \cdot 10^{-2}$	$8,19 \cdot 10^{-3}$	$2,53 \cdot 10^{-3}$	$7,53 \cdot 10^{-4}$	$2,15 \cdot 10^{-4}$

Т а б л и ц а 3

Количество итераций (вверху) и норма погрешности (внизу) в случаях односеточного и двухсеточного методов Ньютона, $\varepsilon = 10^{-5}$

n	N				
	128	512	2048	8192	32768
64	1(3)	2(3)	2(3)	2(3)	2(3)
128		1(3)	2(3)	2(3)	2(3)
256		1(4)	1(4)	2(4)	2(4)
512			1(4)	1(4)	2(4)
1024			1(4)	1(4)	2(4)
2048				1(4)	1(4)
4096				1(4)	1(4)
16384					1(4)
	3	4	4	4	4

n	N				
	128	512	2048	8192	32768
64	$1,08 \cdot 10^{-2}$	$1,62 \cdot 10^{-2}$	$2,27 \cdot 10^{-2}$	$3,03 \cdot 10^{-2}$	$3,86 \cdot 10^{-2}$
128		$4,46 \cdot 10^{-3}$	$6,38 \cdot 10^{-3}$	$8,66 \cdot 10^{-3}$	$1,13 \cdot 10^{-2}$
256		$1,20 \cdot 10^{-3}$	$1,70 \cdot 10^{-3}$	$2,32 \cdot 10^{-3}$	$3,05 \cdot 10^{-3}$
512			$4,38 \cdot 10^{-4}$	$6,01 \cdot 10^{-4}$	$7,93 \cdot 10^{-4}$
1024			$1,13 \cdot 10^{-4}$	$1,53 \cdot 10^{-4}$	$2,02 \cdot 10^{-4}$
2048				$3,86 \cdot 10^{-5}$	$5,11 \cdot 10^{-5}$
4096				$9,82 \cdot 10^{-6}$	$1,28 \cdot 10^{-5}$
16384					$8,05 \cdot 10^{-7}$
	$2,91 \cdot 10^{-2}$	$9,13 \cdot 10^{-3}$	$2,81 \cdot 10^{-3}$	$8,30 \cdot 10^{-4}$	$2,39 \cdot 10^{-4}$

Т а б л и ц а 4

Количество итераций (вверху) и норма погрешности (внизу) в случаях односеточного и двухсеточного методов Пикара, $\varepsilon = 10^{-5}$

n	N				
	128	512	2048	8192	32768
64	2(9)	3(9)	5(9)	7(9)	9(9)
128		3(9)	4(9)	6(9)	8(9)
256		2(10)	3(10)	5(10)	7(10)
512			2(11)	4(11)	6(11)
1024			2(11)	3(11)	5(11)
2048				2(12)	4(12)
4096				2(13)	4(13)
16384					2(14)
	9	11	12	13	15

n	N				
	128	512	2048	8192	32768
64	$1,11 \cdot 10^{-2}$	$1,63 \cdot 10^{-2}$	$2,27 \cdot 10^{-2}$	$3,03 \cdot 10^{-2}$	$3,86 \cdot 10^{-2}$
128		$4,52 \cdot 10^{-3}$	$6,40 \cdot 10^{-3}$	$8,66 \cdot 10^{-3}$	$1,13 \cdot 10^{-2}$
256		$1,19 \cdot 10^{-3}$	$1,70 \cdot 10^{-3}$	$2,32 \cdot 10^{-3}$	$3,05 \cdot 10^{-3}$
512			$4,40 \cdot 10^{-4}$	$6,02 \cdot 10^{-4}$	$7,93 \cdot 10^{-4}$
1024			$1,10 \cdot 10^{-4}$	$1,53 \cdot 10^{-4}$	$2,02 \cdot 10^{-4}$
2048				$3,87 \cdot 10^{-5}$	$5,11 \cdot 10^{-5}$
4096				$9,67 \cdot 10^{-6}$	$1,28 \cdot 10^{-5}$
16384					$3,06 \cdot 10^{-6}$
	$2,82 \cdot 10^{-2}$	$9,23 \cdot 10^{-3}$	$2,85 \cdot 10^{-3}$	$8,43 \cdot 10^{-4}$	$2,40 \cdot 10^{-4}$

Т а б л и ц а 5

Скорость сходимости в случае односеточного метода Ньютона

ε	N							
	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384
10^{-2}	$0,846$	$0,813$	$0,839$	$0,858$	$0,873$	$0,884$	$0,893$	$0,900$
10^{-3}	$0,855$	$0,816$	$0,841$	$0,860$	$0,874$	$0,885$	$0,894$	$0,901$
10^{-4}	$0,856$	$0,816$	$0,841$	$0,860$	$0,874$	$0,885$	$0,894$	$0,901$
10^{-5}	$0,856$	$0,816$	$0,841$	$0,860$	$0,874$	$0,885$	$0,894$	$0,901$
CR_t	$0,778$	$0,807$	$0,830$	$0,848$	$0,862$	$0,874$	$0,885$	$0,893$

Т а б л и ц а 6

Скорость сходимости в случае двухсеточного метода Ньютона
при использовании экстраполяции Ричардсона

ε	N							
	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384
10^{-2}	$1,589$	$1,591$	$1,688$	$1,721$	$1,749$	$1,774$	$1,796$	$1,802$
10^{-3}	$1,598$	$1,578$	$1,684$	$1,720$	$1,749$	$1,777$	$1,804$	$1,803$
10^{-4}	$1,598$	$1,576$	$1,685$	$1,720$	$1,749$	$1,777$	$1,805$	$1,804$
10^{-5}	$1,599$	$1,576$	$1,685$	$1,720$	$1,749$	$1,777$	$1,805$	$1,804$
CR_t	$1,555$	$1,615$	$1,660$	$1,696$	$1,725$	$1,749$	$1,769$	$1,786$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильин А. М.* Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // Мат. заметки. 1969. Т. 6, № 2. С. 237–248.
2. *Бахвалов Н. С.* К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1969. Т. 9, № 4. С. 841–859.
3. *Шишкин Г. И.* Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 1992.
4. *Miller J. J. H., O'Riordan E., Shishkin G. I.* Fitted Numerical Methods for Singular Perturbation Problems. Singapore: World Sci. 1996.
5. *Федоренко Р. П.* Введение в вычислительную физику. М.: Изд-во МФТИ, 1994.
6. *Шайдуров В. В.* Многосеточные методы конечных элементов. М.: Наука, 1989.
7. *Xu J.* A novel two-grid method for semilinear elliptic equation // SIAM J. Sci. Comput. 1994. V. 15. P. 231–237.
8. *Axelsson O., Layton W.* A two-level discretization of nonlinear boundary value problems // SIAM J. Numer. Anal. 1996. V. 33. P. 2359–2374.
9. *Vulkov L. G., Zadorin A. I.* Two-grid algorithms for an ordinary second order equation with exponential boundary layer in the solution // Internat. J. Numer. Analysis and Modeling. 2010. V. 7, N 3. P. 580–592.
10. *Задорин А. И.* Метод интерполяции для задачи с пограничным слоем // Сиб. журн. вычисл. математики. 2007. Т. 10, № 3. С. 267–275.
11. *Марчук Г. И., Шайдуров В. В.* Повышение точности решений разностных схем. М.: Наука, 1979.

12. *Shishkin G. I., Shishkina L. P.* Difference Methods for Singular Perturbation Problems. Boca Raton: Chapman&Hall, 2009. (Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics; V. 140).
13. *Ильин В. П.* Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений. Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ, 2001.
14. *Шишкин Г. И.* Метод повышенной точности для квазилинейного сингулярно возмущенного эллиптического уравнения конвекции-диффузии // Сиб. журн. вычисл. математики. 2006. Т. 9, № 1. С. 81–108.
15. *Roos H., Stynes M., Tobiska L.* Robust Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations. Berlin: Springer-Verl., 2008. (Springer Series in Computational Mathematics; V. 24).
16. *Задорин А. И.* Метод интерполяции на сгущающейся сетке для функции с погранслойной составляющей // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2008. Т. 48, № 9. С. 1673–1684.
17. *Natividad M.C., Stynes M.* Richardson extrapolation for a convection-diffusion problem using a Shishkin mesh // Appl. Numer. Math. 2003. V. 45, N 2. P. 315–329.

Статья поступила 1 февраля 2013 г.

Задорин Александр Иванович
Тиховская Светлана Валерьевна
Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН
ул. Певцова, 13
644099 г. Омск
E-mail: zadorin@ofim.oscsbras.ru; s.tihovskaya@yandex.ru