Интерполяция Лагранжа и формулы Ньютона-Котеса для функций с погранслойной составляющей на кусочно-равномерных сетках

А. И. Задорин

1 Введение

Применение многочлена Лагранжа для интерполяции функций с большими градиентами может приводить к значительным погрешностям [1]. Решение сингулярно возмущенной краевой задачи имеет погранслойные области больших градиентов [2], [3]. В соответствии с [4], [5] применение многочлена Лагранжа для интерполяции функции, имеющей быстро меняющуюся составляющую, соответствующую экспоненциальному пограничному слою, может приводить к погрешностям порядка $O(1)$. Для повышения точности интерполяции функций с погранслойной составляющей в [6] построен аналог интерполяционного многочлена Лагранжа, точный на этой составляющей. При этом сетка может быть равномерной.

В данной работе исследуем возожность применения многочлена Лагранжа для интерполяции функций с погранслойной составляющей на кусочно-равномерной сетке, сгущающейся в пограничном слое [2].

Предполагаем, что интерполируемая функция $u(x)$ представима в виде:

$$u(x) = q(x) + \Phi(x),\ x \in [0,1], \tag{1.1}$$

где

$$|q^{(j)}(x)| \le C_1, \quad |\Phi^{(j)}(x)| \le \frac{C_1}{\varepsilon^j}\, e^{-\alpha x/\varepsilon},\ 0 \le j \le m, \tag{1.2}$$

где функции $q(x)$ и $\Phi(x)$ в явном виде не заданы, $\alpha > 0, \varepsilon > 0$, некоторая постоянная C_1 не зависит от ε.

Согласно (1.2), регулярная составляющая $q(x)$ имеет производные, ограниченные до порядка m, а погранслойная составляющая $\Phi(x)$ имеет производные, не ограниченные равномерно по параметру ε.

В соответствии с [2], [3], [7], представление (1.1) с ограничениями (1.2) имеет место для решения сингулярно возмущенной краевой задачи :

$$\varepsilon u''(x) + a_1(x)u'(x) - a_2(x)u(x) = f(x), \quad u(0) = A,\ u(1) = B, \tag{1.3}$$

где

$$a_1(x) \ge \alpha > 0,\ a_2(x) \ge 0,\ \varepsilon > 0,$$

функции $a_1(x), a_2(x), f(\mathrm{x})$– достаточно гладкие. При малых значениях параметра ε решение задачи (1.3) имеет погранслойную область больших градиентов у границы $x = 0$, чему соответствует представление (1.1).

Сначала для функции $u(x)$, имеющей представление (1.1), проведем анализ погрешности интерполяции многочленом Лагранжа на кусочно-равномерной сетке, предложенной в [2], а затем на основе проведенного анализа оценим погрешность составной формулы Ньютона-Котеса на этой сетке.

Под C и C_j будем подразумевать положительные постоянные, не зависящие от параметра ε и числа интервалов сетки N.

2 Оценка погрешности интерполяции многочленом Лагранжа на кусочно-равномерной сетке

В соответствии с [2] зададим кусочно-равномерную сетку:

$$\Omega = \{x_n : \; x_n = x_{n-1} + h_n, \quad n = 1, 2, \ldots, N, \quad x_0 = 0, \; x_N = 1\} \tag{2.1}$$

с шагами:

$$h_n = \frac{2\sigma}{N}, \; 1 \le n \le \frac{N}{2}; \quad h_n = \frac{2(1-\sigma)}{N}, \; \frac{N}{2} < n \le N,$$

где параметр σ зададим ниже с учетом интерполяционной формулы. Предполагаем, что интерполируемая функция $u(x)$ задана в узлах сетки Ω, $u_n = u(x_n)$, $n = 0, 1, \ldots, N$.

Используем сплайн-интерполяцию многочленом Лагранжа по m последовательно расположенным узлам сетки Ω. Предполагаем, что N кратно $2(m-1)$ и разбиваем исходный интервал $[0,1]$ на $N/(m-1)$ интервалов:

$$[0,1] = \bigcup_{k=0,\, m-1}^{N-m+1} [x_k, x_{k+m-1}].$$

На каждом интервале $[x_k, x_{k+m-1}]$ осуществим интерполяцию функции $u(x)$ многочленом Лагранжа:

$$L_{k,m}(u,x) = \sum_{n=k}^{k+m-1} u_n P_{n,k}(x), \tag{2.2}$$

где множитель Лагранжа $P_{n,k}(x)$ имеет вид:

$$P_{n,k}(x) = \prod_{\substack{j=k \\ j \ne n}}^{k+m-1} \frac{x - x_j}{x_n - x_j}.$$

Зададим константу Лебега для сетки интервала $[x_k, x_{k+m-1}]$:

$$\lambda_{k,m} = \max_x \sum_{n=k}^{k+m-1} |P_{n,k}(x)|. \tag{2.3}$$

Так как N кратно $2(m-1)$, то $[x_k, x_{k+m-1}] \subseteq [0,\sigma]$ или $[x_k, x_{k+m-1}] \subseteq [\sigma, 1]$, поэтому сетка каждого интервала $[x_k, x_{k+m-1}]$ является равномерной. В случае равномерной сетки для константы Лебега (2.3) имеются оценки сверху и снизу. В соответствии с ([8], с. 26):

$$2^{m-3} m^{-3/2} \le \lambda_{k,m} \le 2^{m-1}. \tag{2.4}$$

Для сетки (2.1) зададим

$$\sigma = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{m\varepsilon}{\alpha} \ln N\right\}. \tag{2.5}$$

Оценим погрешность интерполяции многочленом Лагранжа на интервале $[x_k, x_{k+m-1}]$.

Лемма 1. *Пусть для функции $u(x)$ справедливо представление (1.1) с ограничениями (1.2), сетка Ω соответствует (2.1), (2.5). Тогда на произвольном интервале $[x_k, x_{k+m-1}]$ справедливы оценки погрешности интерполяции:*

$$\Big|u(x) - L_{k,m}(u,x)\Big| \leq \frac{C_1 2^m}{4mN^m}\Big[1 + (m\alpha^{-1}\ln N)^m\Big],\ \sigma < \frac{1}{2},\ x_{k+m-1} \leq \sigma, \tag{2.6}$$

$$\Big|u(x) - L_{k,m}(u,x)\Big| \leq \frac{C_1 2^m}{4mN^m}\Big[1 + 2m + \frac{4m}{2^m}\Big],\ \sigma < \frac{1}{2},\ x_k \geq \sigma, \tag{2.7}$$

$$\Big|u(x) - L_{k,m}(u,x)\Big| \leq \frac{C_1}{4mN^m}\Big[1 + \min\Big\{\frac{1}{\varepsilon^m}, \Big(\frac{2m\ln N}{\alpha}\Big)^m\Big\}\Big],\quad \sigma = \frac{1}{2}, \tag{2.8}$$

где постоянная C_1 соответствует (1.2).

Доказательство. В соответствии с [1], при интерполяции функции $u(x)$ многочленом Лагранжа (2.2) справедлива оценка:

$$|u(x) - L_{k,m}(u,x)| \leq \max_{s\in[x_k, x_{k+m-1}]} |u^{(m)}(s)| \frac{|w_m(x)|}{m!},$$

где $w_m(x) = (x - k_k)(x - k_{k+1}) \cdot \dots \cdot (x - x_{k+m-1})$. Пусть τ_k – постоянный шаг интервала $[x_k, x_{k+m-1}]$. Известно ([9], с. 86), что в случае постоянного шага τ_k справедлива оценка:

$$|w_m(x)| \leq \frac{1}{4}\tau_k^m (m-1)!.$$

Следовательно,

$$|u(x) - L_{k,m}(u,x)| \leq \max_{s\in[x_k, x_{k+m-1}]} |u^{(m)}(s)| \frac{\tau_k^m}{4m}. \tag{2.9}$$

Оценим погрешность интерполяции функции $q(x)$. Учитывая (1.2), из (2.9) получаем:

$$|q(x) - L_{k,m}(q,x)| \leq C_1 \frac{\tau_k^m}{4m},\ x \in [x_k, x_{k+m-1}]. \tag{2.10}$$

Пусть $\sigma < 1/2$. Учитывая (2.1), получаем, при всех n выполняется оценка $h_n < 2/N$. Тогда из (2.10) следует:

$$|q(x) - L_{k,m}(q,x)| \leq \frac{C_1 2^m}{4mN^m}. \tag{2.11}$$

Пусть $\sigma = 1/2$. Тогда сетка Ω равномерна и из (2.10) получаем:

$$|q(x) - L_{k,m}(q,x)| \leq \frac{C_1}{4mN^m}. \tag{2.12}$$

Теперь оценим погрешность интерполяции погранслойной составляющей $\Phi(x)$.

Пусть $\sigma < 1/2$.

Рассмотрим случай $x_{k+m-1} \leq \sigma$. В соответствии с (1.2), (2.1), (2.5) имеем:

$$\tau_k = \frac{2m\varepsilon}{\alpha}\frac{\ln N}{N},\quad |\Phi^{(m)}(x)| \leq \frac{C_1}{\varepsilon^m}.$$

Применяя неравенство (2.9) к функции $\Phi(x)$, получаем:

$$|\Phi(x) - L_{k,m}(\Phi,x)| \leq \frac{C_1(2m)^m}{4m\alpha^m}\frac{\ln^m N}{N^m}. \tag{2.13}$$

Пусть $x_k \geq \sigma$. Тогда в соответствии с (1.2), (2.5) выполнится:

$$|\Phi(x)| \leq \frac{C_1}{N^m}. \tag{2.14}$$

Учитывая (2.2), (2.3), (2.14), получаем

$$|\Phi(x) - L_{k,m}(\Phi, x)| \leq |\Phi(x)| + |L_{k,m}(\Phi, x)| \leq \frac{C_1}{N^m}(1 + \lambda_{k,m}).$$

Учитывая (2.4), имеем

$$|\Phi(x) - L_{k,m}(\Phi, x)| \leq \frac{C_1}{N^m}(1 + 2^{m-1}). \tag{2.15}$$

Остается рассмотреть случай $\sigma = 1/2$. Тогда сетка Ω равномерна, из (1.2), (2.5), (2.9) получаем:

$$|\Phi(x) - L_{k,m}(\Phi, x)| \leq \frac{C_1}{4m\varepsilon^m N^m}, \ \varepsilon \geq \frac{\alpha}{2m \ln N}.$$

Следовательно, при $\sigma = 1/2$ справедлива оценка:

$$|\Phi(x) - L_{k,m}(\Phi, x)| \leq \frac{C_1}{4mN^m} \min\Big\{\frac{1}{\varepsilon^m}, \Big(\frac{2m \ln N}{\alpha}\Big)^m\Big\}. \tag{2.16}$$

Учитывая (1.1), оценки (2.11)-(2.13), (2.15), (2.16), получаем оценки (2.6)-(2.8). Лемма доказана.

Полученные оценки погрешности (2.6)-(2.8) равномерны по параметру ε. Эти оценки можно упростить, используя некоторую постоянную C_0:

$$\Big|u(x) - L_{k,m}(u, x)\Big| \leq \begin{cases} C_0 \dfrac{\ln^m N}{N^m}, & \varepsilon < \dfrac{\alpha}{2m \ln N}, \ x_{k+m-1} \leq \sigma, \\ \dfrac{C_0}{N^m}, & \varepsilon < \dfrac{\alpha}{2m \ln N}, \ x_k \geq \sigma, \\ \dfrac{C_0}{N^m} \min\Big\{\dfrac{1}{\varepsilon^m}, \quad \ln^m N\Big\}, & \varepsilon \geq \dfrac{\alpha}{2m \ln N}. \end{cases} \tag{2.17}$$

3 Формулы Ньютона-Котеса на сетке Шишкина

Вопрос построения квадратурных формул для функций с особенностями представляет интерес. Остановимся на формулах Ньютона-Котеса для вычисления интеграла

$$I(u) = \int\limits_0^1 u(x)\, dx, \tag{3.1}$$

где подынтегральная функция $u(x)$ имеет представление (1.1) с ограничениями (1.2) и имеет производные, не ограниченные при малых значениях параметра ε.

Пусть Ω - равномерная сетка интервала $[0, 1]$ с шагом h. Известно, что в регулярном случае, когда интегрируемая функция имеет ограниченные производные, составная формула, основанная на формуле Ньютона-Котеса с m узлами, имеет погрешность не выше $O(h^m)$. В [10]- [12] показано, что если функция $u(x)$ содержит погранслойную составляющую, соответствующую представлению (1.1), то погрешность составных квадратурных формул, основанных на формулах Ньютона-Котеса с числом узлов $m = 2, 3, 4, 5$, при $\varepsilon \leq h$

становится величиной порядка $O(h)$. Таким образом, погрешность формул Ньютона-Котеса существенно повышается с уменьшением параметра ε.

Для повышения точности в [10]-[12] строились аналоги формул Ньютона-Котеса на равномерной сетке с числом узлов от двух до пяти таким образом, чтобы квадратурные формулы были точными на погранслойной составляющей, известной с точностью до множителя. Квадратурные формулы строились на основе приближения подынтегральной функции интерполянтом, точным на погранслойной составляющей [6]. В [10]-[12] доказано, что если построенная квадратурная формула имеет m узлов и $(m-1)$-ая производная регулярной составляющей является ограниченной, то составная формула имеет погрешность порядка $O(h^{m-1})$, равномерно по погранслойной составляющей и ее производным.

В данной работе для повышения точности используем другой подход: применение формулы Ньютона-Котеса на кусочно-равномерной сетке [2], сгущаюшейся в пограничном слое.

Итак, используем сетку (2.1), (2.5) и определим

$$I_{k,m}(u) = \int\limits_{x_k}^{x_{k+m-1}} u(x)\,dx \tag{3.2}$$

для $k = 0, m-1, 2m-2, \ldots, N-m+1$. Для вычисления интеграла (3.2) строим формулу Ньютона-Котеса с m узлами, используя многочлен Лагранжа (2.2):

$$S_{k,m}(u) = \int\limits_{x_k}^{x_{k+m-1}} L_{k,m}(u,x)\,dx. \tag{3.3}$$

Учитывая (2.2), квадратурную формулу (3.3) можно записать в виде:

$$S_{k,m}(u) = \sum_{n=k}^{k+m-1} D_n u_n, \ D_n = \int\limits_{x_k}^{x_{k+m-1}} P_{n,k}(x)\,dx. \tag{3.4}$$

На основе (3.4) зададим составную квадратурную формулу:

$$S_m(u) = \sum_{k=0,\ m-1}^{N-m+1} S_{k,m}(u). \tag{3.5}$$

Оценим погрешность составной формулы (3.5).

Лемма 2. *Пусть для функци $u(x)$ справедливо представление (1.1) с ограничениями (1.2). Тогда для формулы (3.5) на сетке (2.1), (2.5) для некоторой постоянной C справедливы оценки погрешности:*

$$|I(u) - S_m(u)| \le \frac{C}{N^m}\Big[1 + \varepsilon \ln^{m+1} N\Big] \quad \text{при } \varepsilon < \frac{\alpha}{2m \ln N}, \tag{3.6}$$

$$|I(u) - S_m(u)| \le \frac{C}{N^m} \min\Big\{\frac{1}{\varepsilon^m}, \ln^m N\Big\} \quad \text{при } \varepsilon \ge \frac{\alpha}{2m \ln N}. \tag{3.7}$$

Доказательство. Рассмотрим оба случая для значения σ из (2.5).

Пусть $\sigma < 1/2$.

Пусть интервал $[x_k, x_{k+m-1}]$ находится в пограничном слое. Учитывая оценку (2.6), для некоторой постоянной C_2 получим

$$|I_{k,m}(u) - S_{k,m}(u)| \le \frac{C_1 2^{m-1}}{N^{m+1}}\Big[1 + (m\alpha^{-1}\ln N)^m\Big](m-1)\alpha^{-1}\varepsilon \ln N \le C_2 \varepsilon \frac{\ln^{m+1} N}{N^{m+1}}. \tag{3.8}$$

Пусть интервал $[x_k, x_{k+m-1}]$ находится вне пограничного слоя. Учитывая (2.7), для некоторой постоянной C_3 получим

$$|I_{k,m}(u) - S_{k,m}(u)| \le \frac{C_1 2^{m-1}}{mN^{m+1}}(m-1)\Big[1 + 2m + \frac{4m}{2^m}\Big] \le \frac{C_3}{N^{m+1}}. \tag{3.9}$$

Пусть $\sigma = 1/2$. Учитывая (2.8), получим

$$|I_{k,m}(u) - S_{k,m}(u)| \le \frac{C_1}{4N^{m+1}} \frac{m-1}{m}\Big[1 + \min\Big\{\frac{1}{\varepsilon^m}, \Big(\frac{2m\ln N}{\alpha}\Big)^m\Big\}\Big].$$

Следовательно, для некоторой постоянной C_4

$$|I_{k,m}(u) - S_{k,m}(u)| \le \frac{C_4}{N^{m+1}} \min\Big\{\frac{1}{\varepsilon^m}, \ln^m N\Big\}. \tag{3.10}$$

Теперь оценим погрешность составной квадратурной формулы (3.5).

Пусть $\sigma < 1/2$. Учитывая оценки (3.8), (3.9), для некоторой постоянной C получаем оценку (3.6).

Пусть $\sigma = 1/2$. Учитывая оценку (3.10), получаем оценку (3.7). Лемма доказана.

Из оценок (3.6), (3.7) следует, что при $\varepsilon \approx 1$ и при достаточно малых значениях ε для погрешности составной квадратурной формулы, основанной на формуле Ньютона-Котеса с m узлами, справедлива оценка

$$|I(u) - S_m(u)| \le \frac{C_5}{N^m}, \tag{3.11}$$

которая соответствует оценке погрешности в регулярном случае, когда производные интегрируемой функции равномерно ограничены [1].

Известно, что в регулярном случае для квадратурных формул с нечетным количеством узлов оценка погрешности (3.11) может быть улучшена на порядок [1]. Эта оценка может быть улучшена и в случае интегрирования функции, имеющей представление (1.1)-(1.2). В [13] для такой функции на сетке вида (2.1), (2.5) получена равномерная по параметру ε оценка погрешности формулы Симпсона. Доказано, что квадратурная формула $S_3(u)$ имеет погрешность порядка $O(N^{-4}(1 + \varepsilon \ln^5 N))$.

4 Применение модифицированной сетки Шишкина

Улучшим оценку погрешности (2.17) на основе применения модифицированной сетки Шишкина, когда интервал $[0, 1]$ разбивается больше, чем на два интервала с равномерными шагами. Такие сетки применялись, например, в [14], [15] для повышения точности разностных схем для сингулярно возмущенных краевых задач.

Пусть интервал $[0, 1]$ разбивается на K интервалов с равномерными шагами. Как и ранее, предполагаем, что N- число интервалов сетки Ω и N кратно $K(m-1)$. Интервал $[0, 1]$ разбиваем на K интервалов:

$$[0, 1] = \bigcup_{j=1}^{K} [\sigma_{j-1}, \sigma_j], \tag{4.1}$$

где

$$\sigma_0 = 0,\ \sigma_j = \min\Big\{2^{j-K}, \frac{m\varepsilon}{\alpha} \underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{K-j} N\Big\},\ j = 1, 2, \ldots, K-1, \quad \sigma_K = 1. \tag{4.2}$$

Предполагаем, что $\underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{K-1}N > 0$. Отметим, что для задания σ_j вместо 2^{j-K} можно использовать другую монотонно возрастающую по j функцию.

Несложно убедиться, что $\sigma_0 < \sigma_1 < \cdots < \sigma_K$. На каждом интервале $[\sigma_{j-1}, \sigma_j]$ зададим постоянный шаг τ_j:

$$\tau_j = K(\sigma_j - \sigma_{j-1})/N, \ j = 1, 2, \ldots, K. \tag{4.3}$$

Оценим погрешность интерполяции многочленом Лагранжа (2.2) на произвольном интервале $[x_k, x_{k+m-1}]$ построенной сетки.

Пусть $[x_k, x_{k+m-1}] \subset [\sigma_0, \sigma_1]$.

Пусть в (4.2)

$$\sigma_1 = \frac{m\varepsilon}{\alpha} \underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{K-1} N.$$

Учитывая (1.2), (2.9), (4.3), для некоторой постоянной C_6 получаем оценку:

$$\Big|\Phi(x) - L_{k,m}(\Phi, x)\Big| \le \frac{C_6}{N^m}\Big(\underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{K-1} N\Big)^m, \ x \in [x_k, x_{k+m-1}]. \tag{4.4}$$

В случае $\sigma_1 = 2^{1-K}$ учитываем, что

$$\varepsilon \ge \frac{\alpha\, 2^{1-K}}{m \underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{K-1} N}$$

и, используя (1.2), (2.9), (4.3), снова получим оценку (4.4).

Пусть $[x_k, x_{k+m-1}] \subset [\sigma_j, \sigma_{j+1}], \quad j = 1, 2, \ldots, K-2$. В соответствии с (1.2), (2.9), (4.3)

$$\Big|\Phi(x) - L_{k,m}(\Phi, x)\Big| \le \frac{C_1}{4m\varepsilon^m} e^{-\alpha\varepsilon^{-1}\sigma_j}\Big(K(\sigma_{j+1} - \sigma_j)/N\Big)^m, \ x \in [x_k, x_{k+m-1}]. \tag{4.5}$$

Пусть

$$\sigma_j = \frac{m\varepsilon}{\alpha} \underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{K-j} N, \ \sigma_{j+1} = \frac{m\varepsilon}{\alpha} \underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{K-j-1} N. \tag{4.6}$$

Учитывая (4.6) в (4.5), получаем:

$$\Big|\Phi(x) - L_{k,m}(\Phi, x)\Big| \le \frac{C_1}{4m}\Big(\frac{mK}{\alpha N}\Big)^m \Big(1 - \underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{K-j} N \Big/ \underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{K-j-1} N\Big)^m.$$

Следовательно,

$$\Big|\Phi(x) - L_{k,m}(\Phi, x)\Big| \le \frac{C_1}{4m}\Big(\frac{mK}{\alpha N}\Big)^m.$$

Итак, в данном случае для некоторой постоянной C_6

$$\Big|\Phi(x) - L_{k,m}(\Phi, x)\Big| \le \frac{C_6}{N^m}, \ x \in [x_k, x_{k+m-1}]. \tag{4.7}$$

Пусть

$$\sigma_j = \frac{m\varepsilon}{\alpha} \underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{K-j} N, \quad \sigma_{j+1} = 2^{j+1-K}.$$

Тогда усиливаем неравенство (4.5), заменяя σ_{j+1} на большее значение

$$\frac{m\varepsilon}{\alpha} \underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{K-j-1} N$$

и по аналогии с предыдущим случаем получаем оценку (4.7).

Пусть

$$\sigma_j = 2^{j-K},\ \sigma_{j+1} = \frac{m\varepsilon}{\alpha}\underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{K-j-1} N.$$

Тогда для некоторой постоянной C

$$\varepsilon^{-m} e^{-\alpha\varepsilon^{-1}\sigma_j} \leq C.$$

Используя это неравенство в (4.5), получаем (4.7).

Аналогично можно показать, что и в случае

$$\sigma_j = 2^{j-K}, \sigma_{j+1} = 2^{j+1-K}$$

справедлива оценка (4.7).

Пусть $[x_k, x_{k+m-1}] \subset [\sigma_{K-1}, 1]$. По аналогии с рассмотренными случаями можно убедиться в справедливости оценки (4.7).

В соответствии с (1.2) функция $q(x)$ имеет ограниченные производные до порядка m. Несложно убедиться, что тогда для любого k и некоторой постоянной C_6

$$\Big|q(x) - L_{k,m}(q, x)\Big| \leq \frac{C_6}{N^m},\ x \in [x_k, x_{k+m-1}]. \tag{4.8}$$

Учитывая оценки (4.4), (4.7), (4.8), получаем, что для некоторой постоянной C справедлива следующая оценка погрешности интерполяции многочленом Лагранжа на интервале $[x_k, x_{k+m-1}]$ в случае модифицированной сетки Шишкина:

$$\Big|u(x) - L_{k,m}(u, x)\Big| \leq \begin{cases} \dfrac{C}{N^m}\Big(\underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{K-1} N\Big)^m, & x_{k+m-1} \leq \sigma_1, \\ \\ \dfrac{C}{N^m}, & x_k \geq \sigma_1. \end{cases} \tag{4.9}$$

Сравнивая оценки (4.9) и (2.17), убеждаемся, что применение модифицированной сетки Шишкина приводит к повышению точности погрешности интерполяции. При достаточно больших K погрешность интерполяции становится величиной порядка $O(N^{-m})$, как и в регулярном случае, когда интерполируемая функция имеет равномерно ограниченные производные.

Погрешность формулы Ньютона-Котеса. Проведем анализ погрешности составной формулы Ньютона-Котеса на модифицированной сетке Шишкина. Для вычисления интеграла (3.1) применяем составную квадратурную формулу (3.5) на сетке, задаваемой согласно (4.1)-(4.3). Используя (4.9) и оценивая погрешность составной квадратурной формулы на интервалах $[\sigma_j, \sigma_{j+1}],\ j = 0, 1, \ldots, K-1$, несложно показать, что для некоторой постоянной C справедлива оценка:

$$|I(u) - S_m(u)| \leq \frac{C}{N^m}\Big[1 + \varepsilon\Big(\underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{K-1} N\Big)^{m+1}\Big].$$

При достаточно больших K погрешность составной формулы Ньютона-Котеса становится величиной порядка $O(N^{-m})$, как и в регулярном случае [1].

5 Численные эксперименты

Рассмотрим функцию

$$u(x) = \cos\frac{\pi x}{2} + e^{-\varepsilon^{-1}(x+x^2/2)},\ x \in [0,1],\ \varepsilon > 0, \tag{5.1}$$

которую можно рассматривать как решение задачи (1.3) при задании $a_1(x) = 1+x, a_2(x) = 0$ и соответствующих $f(x), A, B$. Остановимся на случае интерполяционного многочлена Лагранжа $L_{k,4}(u,x)$ с узлами интерполяции $x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}$ произвольного интервала $[x_k, x_{k+3}]$, $k = 0, 3, 6, \dots, N-3$. Определим погрешность

$$\Delta_{N,\varepsilon} = \max_{k=0,3,\dots,N-3}\ \max_{j=1,2,3} |L_{k,4}(u,\tilde{x}_{k+j}) - u(\tilde{x}_{k+j})|, \quad \tilde{x}_{k+j} = (x_{k+j} + x_{k+j-1})/2$$

и вычисленный порядок точности интерполяционного многочлена

$$M_{N,\varepsilon} = \log_2 \frac{\Delta_{N,\varepsilon}}{\Delta_{2N,\varepsilon}}. \tag{5.2}$$

В таблицах под $e \pm m$ будем подразумевать $10^{\pm m}$.

В Табл. 1 в случае равномерной сетки приведена погрешность кусочно-кубической интерполяции $\Delta_{N,\varepsilon}$ в зависимости от N и ε. При $\varepsilon = 1$ интерполяционная формула обладает четвертым порядком точности по шагу сетки, однако погрешность становится величиной порядка $O(1)$ при малых значениях параметра ε.

Таблица 1: Погрешность кусочно-кубической интерполяции на равномерной сетке

ε	N					
	24	48	96	192	384	768
1	$4.43e-7$	$2.89e-8$	$1.84e-9$	$1.16e-10$	$7.31e-12$	$4.58e-13$
10^{-1}	$4.04e-4$	$2.85e-5$	$1.88e-6$	$1.21e-7$	$7.64e-9$	$4.80e-10$
10^{-2}	$2.03e-1$	$7.14e-2$	$1.28e-2$	$1.44e-3$	$1.23e-4$	$8.99e-6$
10^{-3}	$3.12e-1$	$3.12e-1$	$3.07e-1$	$2.44e-1$	$1.08e-1$	$2.41e-2$
10^{-4}	$3.12e-1$	$3.12e-1$	$3.12e-1$	$3.12e-1$	$3.12e-1$	$3.11e-1$
10^{-5}	$3.12e-1$	$3.12e-1$	$3.12e-1$	$3.12e-1$	$3.12e-1$	$3.12e-1$

В Табл. 2 в случае кусочно-равномерной сетки (2.1), (2.5) и $m = 4$ приведены значения $\Delta_{N,\varepsilon}$ и $M_{N,\varepsilon}$ для кусочно-кубической интерполяции в зависимости от N и ε. В последней строке таблицы приведена теоретическая оценка порядка точности

$$M_N = \log_2 \frac{16 \ln^4 N}{\ln^4(2N)},$$

соответствующая первой (наименее точной) оценке в (2.17) при $m = 4$. При малых значениях ε с ростом N вычисленный порядок точности $M_{N,\varepsilon}$ приближается к M_N.

Теперь остановимся на анализа погрешности интерполяции многочленом Лагранжа на модифицированной сетке Шишкина (4.1)-(4.3). Остановимся на случае, когда интервал $[0,1]$ разбивается на три подинтервала с заданием

$$\sigma_1 = \min\left\{\frac{1}{4}, \frac{4\varepsilon}{\alpha}\ln\ln N\right\},\ \sigma_2 = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{4\varepsilon}{\alpha}\ln N\right\} \tag{5.3}$$

и равномерных шагов сетки на каждом подинтервале:

$$\tau_1 = \frac{4\sigma_1}{N}, \tau_2 = \frac{4(\sigma_2 - \sigma_1)}{N}, \tau_3 = \frac{2(1-\sigma_2)}{N}. \tag{5.4}$$

Таблица 2: Погрешность и порядок точности кусочно-кубической интерполяции на сетке Шишкина

ε	N					
	24	48	96	192	384	768
1	$4.43e-7$ 3.94	$2.89e-8$ 3.97	$1.84e-9$ 3.98	$1.16e-10$ 3.99	$7.31e-12$ 3.99	$4.58e-13$ 3.98
10^{-1}	$4.04e-4$ 3.82	$2.85e-5$ 3.92	$1.88e-6$ 3.96	$1.21e-7$ 3.98	$7.64e-9$ 3.99	$4.80e-10$ 3.99
10^{-2}	$1.34e-2$ 2.19	$2.94e-3$ 2.60	$4.84e-4$ 2.90	$6.46e-5$ 3.11	$7.44e-6$ 3.26	$7.73e-7$ 3.37
10^{-3}	$1.37e-2$ 2.17	$3.03e-3$ 2.59	$5.03e-4$ 2.89	$6.76e-5$ 3.11	$7.82e-6$ 3.26	$8.14e-7$ 3.36
10^{-4}	$1.37e-2$ 2.17	$3.00e-3$ 2.58	$5.05e-4$ 2.89	$6.79e-5$ 3.11	$7.86e-6$ 3.26	$8.20e-7$ 3.36
10^{-5}	$1.37e-2$ 2.17	$3.04e-3$ 2.58	$5.05e-4$ 2.89	$6.79e-5$ 3.11	$7.86e-6$ 3.26	$8.19e-7$ 3.36
M_N	2.86	3.05	3.18	3.28	3.36	3.43

В Табл. 3 в случае кусочно-равномерной сетки, соответствующей (5.3)-(5.4), приведены значения $\Delta_{N,\varepsilon}$ и $M_{N,\varepsilon}$ для кусочно-кубической интерполяции в зависимости от N и ε. В последней строке таблицы при различных N приведена теоретическая оценка порядка точности:

$$P_N = \log_2 \frac{16(\ln\ln N)^4}{(\ln\ln(2N))^4},$$

соответствующая первой оценке в (4.9) при $m = 4$ и $K = 3$. При малых значениях ε с ростом N вычисленный порядок точности $M_{N,\varepsilon}$ приближается к P_N, что подтверждает оценку (4.9).

Из сравнения таблиц 2 и 3 следует, что при модификации сетки Шишкина повышается точность интерполяции многочленом Лагранжа функции с погранслойной составляющей.

Аналогичным образом были проведены вычислительные эксперименты с использованием многочлена Лагранжа с двумя и тремя узлами интерполяции. Как и в случае четырех узлов интерполяции, получены погрешности, подтверждающие оценки (2.17) и (4.9).

Теперь остановимся на анализе формулы Ньютона-Котеса с четырьмя узлами для вычисления интеграла от функции с погранслойной составляющей:

$$I(u) = \int\limits_0^1 u(x)\,dx, \quad u(x) = \cos\frac{\pi x}{2} + e^{-x/\varepsilon},\ \varepsilon > 0.$$

Выпишем квадратурную формулу для каждого интервала $[x_k, x_{k+3}]$:

$$S_{k,4}(u) = \frac{3\tau_k}{8}(u_k + 3u_{k+1} + 3u_{k+2} + u_{k+3}),$$

где $k = 0, 3, 6, \ldots, N-3$ и τ_k – постоянный шаг интервала $[x_k, x_{k+3}]$. Теперь выпишем составную квадратурную формулу:

$$S_4(u) = \sum_{k=0,3}^{N-3} S_{k,4}(u). \tag{5.5}$$

Таблица 3: Погрешность и порядок точности кусочно-кубической интерполяции на модифицированной сетке Шишкина

ε	N					
	24	48	96	192	384	768
1	$1.43e-7$	$9.23e-9$	$5.86e-10$	$3.69e-11$	$2.31e-12$	$1.44e-13$
	3.95	3.97	3.98	3.99	3.99	3.99
10^{-1}	$1.36e-4$	$9.28e-6$	$6.03e-7$	$3.84e-8$	$2.42e-9$	$1.52e-10$
	3.87	3.94	3.97	3.98	3.99	3.99
10^{-2}	$2.04e-3$	$3.18e-4$	$3.77e-4$	$3.76e-6$	$3.30e-7$	$2.71e-8$
	2.68	3.07	3.33	3.49	3.60	3.68
10^{-3}	$2.11e-3$	$3.32e-4$	$3.95e-5$	$3.93e-6$	$3.48e-7$	$2.86e-8$
	2.67	3.07	3.32	3.49	3.60	3.67
10^{-4}	$2.12e-3$	$3.33e-4$	$3.97e-5$	$3.95e-6$	$3.50e-7$	$2.87e-8$
	2.67	3.06	3.32	3.49	3.60	3.67
10^{-5}	$2.12e-3$	$3.33e-4$	$3.97e-5$	$3.95e-6$	$3.50e-7$	$2.88e-8$
	2.67	3.06	3.31	3.49	3.60	3.67
P_N	3.09	3.34	3.49	3.59	3.65	3.71

Таблица 4: Погрешность квадратурной формулы (5.5) на равномерной сетке

ε	N					
	24	48	96	192	384	768
1	$1.69e-7$	$1.06e-8$	$6.63e-10$	$4.15e-11$	$2.59e-12$	$1.61e-13$
10^{-1}	$3.63e-5$	$2.33e-6$	$1.47e-7$	$9.23e-9$	$5.77e-10$	$3.61e-11$
10^{-2}	$6.36e-3$	$1.13e-3$	$1.17e-4$	$8.64e-6$	$5.66e-7$	$3.58e-8$
10^{-3}	$1.46e-2$	$6.81e-3$	$2.91e-3$	$9.85e-4$	$2.10e-4$	$2.55e-5$
10^{-4}	$1.55e-2$	$7.71e-3$	$3.81e-3$	$1.85e-3$	$8.77e-4$	$3.88e-4$
10^{-5}	$1.56e-2$	$7.80e-3$	$3.89e-3$	$1.94e-3$	$9.67e-4$	$4.78e-4$

Для заданных ε и N вычисляем погрешность

$$\Delta_{N,\varepsilon} = |I(u) - S_4(u)|.$$

Далее определяем вычисленный порядок точности квадратурной формулы в соответствии с соотношением (5.2).

В Табл. 4 при различных значениях ε и N приведена погрешность $\Delta_{N,\varepsilon}$ квадратурной формулы $S_4(u)$ в случае равномерной сетки. Точность квадратурной формулы понижается с уменьшением ε. При этом порядок точности квадратурной формулы понижается с четвертого до первого с уменьшением ε.

В Табл. 5 при различных значениях ε и N приведены погрешность $\Delta_{N,\varepsilon}$ и порядок точности $M_{N,\varepsilon}$ квадратурной формулы $S_4(u)$ на кусочно-равномерной сетке (2.1), (2.5) при $m = 4$. С уменьшением ε погрешность квадратурной формулы сначала увеличивается, а затем уменьшается, что соответствует оценкам (3.6), (3.7). Вычисленный порядок точности близок к четырем при $\varepsilon \approx 1$ и при малых зачениях ε.

В Табл. 6 при различных значениях ε и N приведены погрешность $\Delta_{N,\varepsilon}$ и порядок точности $M_{N,\varepsilon}$ квадратурной формулы $S_4(u)$ на модифицированной сетке Шишкина, соответ-

Таблица 5: Погрешность и вычисленный порядок точности квадратурной формулы (5.5) на сетке Шишкина

ε	N					
	24	48	96	192	384	768
1	$1.69e-7$ 4.00	$1.06e-8$ 4.00	$6.63e-10$ 4.00	$4.15e-11$ 4.00	$2.59e-12$ 4.01	$1.61e-13$
10^{-1}	$3.63e-5$ 3.96	$2.33e-6$ 3.99	$1.47e-7$ 3.99	$9.23e-9$ 4.00	$5.77e-10$ 4.00	$3.61e-11$
10^{-2}	$1.25e-4$ 2.67	$1.97e-5$ 2.96	$2.53e-6$ 3.18	$2.85e-7$ 3.28	$2.94e-8$ 3.36	$2.86e-9$
10^{-3}	$1.46e-5$ 2.80	$2.10e-6$ 3.00	$2.61e-7$ 3.17	$2.90e-8$ 3.29	$2.97e-9$ 3.37	$2.88e-10$
10^{-4}	$3.66e-6$ 3.41	$3.44e-7$ 3.32	$3.44e-8$ 3.34	$3.41e-9$ 3.37	$3.29e-10$ 3.42	$3.08e-11$
10^{-5}	$2.56e-6$ 3.93	$1.68e-7$ 3.84	$1.17e-8$ 3.77	$8.57e-10$ 3.72	$6.51e-11$ 3.68	$5.09e-12$

ствующей (5.3)-(5.4). Вычисленный порядок точности квадратурной формулы повысился при модификации сетки Шишкина.

Таблица 6: Погрешность и вычисленный порядок точности квадратурной формулы (5.5) на модифицированной сетке Шишкина

ε	N					
	24	48	96	192	384	768
1	$1.69e-7$ 4.00	$1.06e-8$ 4.00	$6.63e-10$ 4.00	$4.15e-11$ 4.00	$2.59e-12$ 4.01	$1.61e-13$
10^{-1}	$3.63e-5$ 3.96	$2.33e-6$ 3.99	$1.47e-7$ 3.99	$9.23e-9$ 4.00	$5.77e-10$ 4.00	$3.61e-11$
10^{-2}	$4.22e-5$ 3.02	$5.21e-6$ 3.31	$5.25e-7$ 3.49	$4.69e-8$ 3.59	$3.90e-9$ 3.66	$3.09e-10$
10^{-3}	$6.38e-6$ 3.29	$6.52e-7$ 3.43	$6.05e-8$ 3.54	$5.19e-9$ 3.62	$4.21e-10$ 3.68	$3.28e-11$
10^{-4}	$2.83e-6$ 3.83	$1.99e-7$ 3.80	$1.43e-8$ 3.80	$1.03e-9$ 3.80	$7.42e-11$ 3.81	$5.29e-12$
10^{-5}	$2.48e-6$ 4.01	$1.54e-7$ 3.98	$9.73e-9$ 3.98	$6.19e-10$ 3.97	$3.96e-11$ 3.96	$2.54e-12$

6 Заключение

Проведен анализ точности интерполяционного многочлена Лагранжа при интерполяции функции одной переменной, соответствующей решению сингулярно возмущенной краевой задачи с экспоненциальным пограничным слоем. Показано, что в случае равномерной сетки погрешность интерполяции может быть значительной. Получена равномерная по малому параметру оценка погрешности интерполяции многочленом Лагранжа на сетке Шишкина. Показано, что модификация сетки Шишкина, при которой исходный интервал разбивается более, чем на два подинтервала с равномерными шагами, приводит к уменьшению погрешности интерполяции. На основе анализа погрешности интерполяции многочленом Лагранжа получены оценки погрешности составных квадратурных формул Ньютона-Котеса на сетке Шишкина и ее модификации. Эти оценки равномерны по малому параметру.

Список литературы

[1] **Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.** Численные методы.– Москва: Наука, 1987.

[2] **Шишкин Г.И.** Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений.– Екатеринбург: УрО РАН, 1992.

[3] **Miller J.J.H., O'Riordan E., and Shishkin G.I.** Fitted Numerical Methods for Singular Perturbation Problems: Error Estimates in the Maximum Norm for Linear Problems in One and Two Dimensions (Revised Edition).– Singapore: World Scientific, 2012.

[4] **Задорин А.И.** Метод интерполяции для задачи с пограничным слоем // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние.– Новосибирск, 2007.– Т. 10, № 3.– С. 267-275.

[5] **Задорин А.И., Задорин Н.А.** Сплайн-интерполяция на равномерной сетке функции с погранслойной составляющей // Ж. вычисл. матем. и матем. физ.– 2010.– Т. 50, № 2.– С. 221-233.

[6] **Zadorin A.I., Zadorin N.A.** Interpolation formula for functions with a boundary layer component and its application to derivatives calculation // Siberian Electronic Mathematical Reports.– 2012.– V. 9.– P. 445-455.

[7] **Lins T.** The Necessity of Shishkin Decompositions // Applied Mathematics Letters.– 2001.– V. 14.– C. 891-896.

[8] **Корнев А.А., Чижонков Е.В.** Упражнения по численным методам. Часть два.– Москва: МГУ, 2003.

[9] **Ильин В.П.** Численный анализ.– Новосибирск: ИВМ и МГ СО РАН, 2004.

[10] **Задорин А.И., Задорин Н.А.** Квадратурные формулы для функций с погранслойной составляющей // Ж. вычисл. матем. и матем. физ.– 2011.– Т. 51, № 11.– С. 1952-1962.

[11] **Задорин А.И., Задорин Н.А.** Аналог формулы Ньютона-Котеса с четырьмя узлами для функции с погранслойной составляющей // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние.– Новосибирск, 2013.– Т. 16, № 4.– С. 313-323.

[12] **Zadorin A., Zadorin N.** Quadrature Formula with Five Nodes for Functions with a Boundary Layer Component // Lect. Notes in Comput. Sci..– Berlin: Springer.– 2013.– V. 8236.– P. 540- 546.

[13] **Задорин А.И., Задорин Н.А.** Формула Симпсона и ее модификации для функции с погранслойной составляющей // Сибирские электронные математические известия.– 2014.– Т. 11.– С. 258-267.

[14] **Vulanovic R.** A Priori Meshes for Singularly Perturbed Quasilinear Two-Point Boundary Value Problems // IMA J. Numer. Anal..– 2001.– V. 21, № 1.– P. 349-366.

[15] **Шишкин Г.И.** Улучшенная кусочно-равномерная сетка для сингулярно возмущенного эллиптического уравнения реакции-диффузии // Труды Института математики и механики УрО РАН.– 2003.– Т. 9, № 2.– С. 172-179.

Ключевые слова: функция одной переменной, пограничный слой, большие градиенты, сетка Шишкина, интерполяция Лагранжа, формула Ньютона-Котеса, оценка погрешности.

Задорин А. И. Интерполяция Лагранжа и формулы Ньютона-Котеса для функций с погранслойной составляющей на кусочно-равномерных сетках.

УДК 519.652

Исследуется вопрос итерполяции функции одной переменной, соответствующей решению краевой задачи для уравнения с малым параметром ε при старшей производной. Применение многочлена Лагранжа на равномерной сетке для интерполяции такой функции может привести к значительным погрешностям. Получены ε-равномерные оценки погрешности интерполяции многочленом Лагранжа на сетке Шишкина. Приведена модификация сетки Шишкина, повышающая точность интерполяции. Получены ε-равномерные оценки погрешности формул Ньютона-Котеса на таких сетках. Обсуждаются результаты численных экспериментов.

Key words: one-variable function, boundary layer, high gradients, Shishkin mesh, Lagrange interpolation, Newton-Cotes formula, error estimate.

Zadorin A. I. Lagrange interpolation and Newton-Cotes formulas for functions with a boundary layer component on piecewise-uniform meshes.

UDC 519.652

The interpolation problem of a one-variable function, which can be considered as a solution of a boundary value problem for a equation with a small parameter ε before highest derivative is investigated. The application of Lagrange interpolation for such functions on a uniform grid can lead to significant errors. In the case of Shishkin mesh ε-uniform error estimates of Lagrange interpolation are obtained. Shishkin mesh is modified to increase the interpolation accuracy. The ε-uniform error estimates of Newton-Cotes formulas on such meshes are obtained. Numerical results are discussed

Задорин Александр Иванович, д.ф.-м.н., зав. лаб. Института математики СО РАН.
Р.т. (3812)23-67-39
644099, Омск, ул. Певцова, 13, ИМ СО РАН, Омский филиал.
zadorin@ofim.oscsbras.ru