Математические структуры и моделирование
2001, вып. 7, с. 17–27

УДК 519.62

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ И ТОЧЕЧНЫМ ИСТОЧНИКОМ НА БЕСКОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ

О.В. Величко, А.И. Задорин

A system of second order nonlinear equations with a small parameter effecting higher derivatives and a point source on an infinite interval is considered. The question of the transformation of the boundary problem to the finite interval is investigated. For reduced to finite interval problem difference scheme is investigated.

Введение

При математическом моделировании стационарного распространения примеси от точечного источника возникает краевая задача с точечным источником для нелинейной автономной системы уравнений второго порядка в неограниченной области. Уравнения содержат малый параметр при старших производных, соответствующий коэффициенту диффузии. При численном решении такой задачи актуальной проблемой является перенос краевых условий из бесконечности и разработка разностной схемы, учитывающей погранслойный рост решения.

Для переноса краевых условий из бесконечности в соответствии с подходом, разрабатываемым в работах А.А. Абрамова, Н.Б. Конюховой и их коллег, например, в [1–4] и целом ряде других работ, выделяем одномерные многообразия решений исходной системы, удовлетворяющие предельным условиям на плюс и минус бесконечности. Наличие малого параметра позволяет решать вспомогательные сингулярные задачи Коши асимптотическим методом. Для редуцированной к конечному интервалу задачи построена разностная схема и доказана ее равномерная относительно малого параметра сходимость.

Под C и C_i будут подразумеваться положительные постоянные, не зависящие от параметра ε и шагов разностной сетки. Используем нормы:
– для ограниченной функции $p(x)$ $\quad ||p(x)|| = \max\limits_{x\in I}|p(x)|$;
– для вектора q из N компонент $\quad ||q|| = \max\limits_{1\le i\le N}|q_i|$;
– для вектор-функции $q(x)$ из N компонент $\quad ||q(x)|| = \max\limits_{1\le i\le N}\max\limits_{x\in I}|q_i(x)|$.

Предполагаем, что норма матрицы согласована с векторной нормой. Под неравенством векторов будем понимать покомпонентное неравенство.

© **2001 О.В. Величко, А.И. Задорин**
E-mail: zadorin@iitam.omsk.net.ru
Омский государственный университет
Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №01-01-01022)

Итак, рассмотрим исходную краевую задачу

$$Tu = -\varepsilon u'' + au' + g(u) = 0, \quad x \neq 0, \tag{1}$$

$$T_0 u = \varepsilon u'(+0) - \varepsilon u'(-0) = -Q, \tag{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} u(x) = A, \quad \lim_{x\to\infty} u(x) = B, \tag{3}$$

где $\varepsilon \in (0,1]$, a – постоянная диагональная квадратная матрица порядка N с диагональными элементами $a_i, i = 1, 2, ..., N$, $g(u)$ – непрерывно дифференцируемая вектор-функция, Q, A, B – векторы из N компонент.

Пусть

$$G(v) = \frac{\partial g_i(v)}{\partial v_j}, \, v \in R^N$$

– матрица Якоби вектор-функции $g(v)$. Предполагаем, что

$$a_i \geqslant m > 0, \, Q_i \geqslant 0, \, g(A) = 0, \, g(B) = 0,$$

$$G_{i,j}(v) \leq 0, \, i \neq j, \quad \sum_{j=1}^{N} G_{i,j}(v) \geqslant \sigma_i > \sigma > 0, \, v \in R^N, \, i = 1, .., N.$$

Задача (1) – (3) является модельной при описании переноса примеси от точечного источника с учетом химических реакций. Случай одного уравнения с точечным источником на бесконечном интервале рассматривался нами в [5, 6].

1. Анализ решения исходной задачи

Рассмотрим линейный оператор

$$Lu = -\varepsilon u'' + au' + Mu, \, x \neq 0,$$

$$L_0 u = \varepsilon u'(+0) - \varepsilon u'(-0), \, \lim_{x\to-\infty} u(x) = A, \quad \lim_{x\to\infty} u(x) = B,$$

где для матрицы M справедливы ограничения

$$M_{i,j} \leq 0, i \neq j, \quad \sum_{j=1}^{N} M_{i,j} \geqslant \sigma_1 > 0, i = 1, .., N.$$

Лемма 1. *Пусть существует вектор-функция $\phi(x)$ с дважды непрерывно дифференцируемыми компонентами всюду, кроме точки нуль, где сама функция непрерывна, а ее первая производная имеет разрыв первого рода, такая, что для любого $x \in (-\infty, +\infty)$ при всех $i = 1, .., N$*

$$\phi_i(x) > 0, \, L\phi_i(x) > 0, x \neq 0, \, L_0\phi_i(x) \leq 0. \tag{4}$$

Тогда если для некоторой вектор-функции $\psi(x)$ с дважды непрерывно дифференцируемыми компонентами всюду, кроме точки нуль,

$$L\psi(x) \geqslant 0, \, L_0\psi(x) \leq 0, \, \lim_{x\to\pm\infty} \psi(x) \geqslant 0,$$

то при всех x $\psi(x) \geqslant 0$.

Доказательство. Предположим, что некоторые компоненты вектор-функции $\psi(x)$ оказались меньше нуля. Определим $y : y_i = \psi_i/\phi_i, i = 1,..,N$. Тогда при некоторых i, x_0 будет $y_i(x_0) < 0$. В силу краевых условий функция $y_i(x)$ имеет в некоторой точке локальный отрицательный минимум. Без ограничения общности можно считать, что $y_i(x_0) = \min_j \min_x y_j(x)$. Рассмотрим два случая:

1) Пусть $x_0 = 0$. Тогда

$$y_i(0) < 0,\; y_i'(+0) \geqslant 0,\; y_i'(-0) \leq 0,\; y_i'^2(+0) + y_i'^2(-0) > 0.$$

Получаем противоречие с условием леммы:

$$L_0^{(i)}\psi = \varepsilon y_i'(+0)\phi_i(+0) - \varepsilon y_i'(-0)\phi_i(-0) + y_i(0)L_0\phi_i > 0.$$

2) Пусть $x_0 \neq 0$. Тогда $y_i(x_0) < 0,\; y_i'(x_0) = 0,\; y_i''(x_0) \geqslant 0$. В этом случае

$$L^{(i)}\psi(x_0) = -\varepsilon\phi_i(x_0)y_i''(x_0) + (-2\varepsilon\phi_i'(x_0) + a_i\phi_i(x_0))y_i'(x_0) +$$

$$+ y_i(x_0)L^{(i)}\phi(x_0) + \sum_{j=1}^{N} M_{ij}\phi_j(x_0)(y_j(x_0) - y_i(x_0)) < 0,$$

что противоречит условию леммы. ■

Определим вектор-функцию $\phi(x)$ с компонентами

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \exp(r_1^0 x), & x \leq 0 \\ \exp(r_2^0 x), & x \geqslant 0, \end{cases}$$

где r_1^0, r_2^0 – положительный и отрицательный корни уравнения $-\varepsilon r^2 + mr + 0,5\sigma_1 = 0$. Для $\phi_i(x)$ выполнены условия (4). В соответствии с леммой 1 для оператора L справедлив принцип максимума.

Лемма 2. *Пусть* $u(x)$ *– решение задачи* (1) – (3)*. Тогда при всех* $i = 1,..,N$ *для любого* $x \in (-\infty, +\infty)$

$$|u_i(x)| \leq \frac{1}{\sigma}\,||g(0)|| + \frac{1}{m}\,\Phi_i(x)\,||Q|| + ||A|| + ||B||,$$

где

$$\Phi_i(x) = \begin{cases} \exp(r_{i1}x), & x \leq 0 \\ \exp(r_{i2}x), & x \geqslant 0 \end{cases},$$

r_{i1}, r_{i2} *– положительный и отрицательный корни уравнения*

$$-\varepsilon r_i^2 + a_i r_i + \sigma_i = 0. \tag{5}$$

Доказательство. Определим покомпонентно следующую вектор-функцию:

$$\psi_i(x) = \frac{1}{\sigma}\,||g(0)|| + \frac{1}{m}\,\Phi_i(x)\,||Q|| + ||A|| + ||B|| \pm u_i(x).$$

Тогда
$$L_0^{(i)}\psi \le \frac{1}{m}\,||Q||\,(\varepsilon r_{i2} - \varepsilon r_{i1}) + Q_i < 0.$$
Рассмотрим случай $x < 0$. Имеем
$$L^{(i)}\psi \geqslant \sum_{j=1}^{N} G_{i,j}\,\frac{1}{\sigma}\,||g(0)|| + \sum_{j=1}^{N} G_{i,j}||A|| + \sum_{j=1}^{N} G_{i,j}||B|| - |g(0)| > 0.$$
Аналогично для случая $x > 0 \quad L^{(i)}\psi > 0$.

Очевидно, что $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\psi(x) \geqslant 0$. Используя принцип максимума, получим $\psi(x) \geqslant 0$, из чего следует утверждение леммы. ■

Из данной леммы и принципа максимума следует существование, единственность и ограниченность решения задачи (1) – (3).

Лемма 3. *Пусть $u(x)$ – решение задачи* (1) – (3)*. Тогда при всех i для $x \le 0$*
$$|u_i(x) - A_i| \le |u_i(0) - A_i|\exp(r_{i1}x);$$
для $x \geqslant 0$
$$|u_i(x) - B_i| \le |u_i(0) - B_i|\exp(r_{i2}x),$$
где r_{1i} и r_{2i} соответствуют (5)*.*

Доказательство. Рассмотрим случай $x \le 0$. Пусть $z(x) = u(x) - A$. Тогда $z(x)$ является решением краевой задачи
$$Lz = -\varepsilon z'' + az' + Gz = 0,\ z(0) = u(0) - A,\ \lim_{x\to-\infty} z(x) = 0.$$
Определим покомпонентно следующую вектор-функцию:
$$\psi_i(x) = |u_i(0) - A_i|\exp(r_{i1}x) \pm z_i(x).$$
Тогда для каждого i
$$L^{(i)}\psi \geqslant (-\varepsilon r_{i1}^2 + a_i r_{i1} + \sigma_i)|u_i(0) - A_i|\exp(r_{i1}x) = 0, \quad \psi(0) \geqslant 0, \quad \lim_{x\to-\infty}\psi(x) \geqslant 0.$$
В силу принципа максимума $\psi(x) \geqslant 0$, из чего следует утверждение леммы. Случай $x \geqslant 0$ рассматривается аналогично. ■

Согласно лемме 3, при достаточно больших $|x|$ $u(x)$ по каждой компоненте экспоненциально приближается к краевым условиям.

Лемма 4. *Пусть $u(x)$ – решение задачи* (1) – (3)*. Найдется C такое, что при всех i, для которых $Q_i \ne 0$, при $x \le 0$*
$$|u_i^{(j)}(x)| \le C\left[1 + \frac{1}{\varepsilon^j}\exp\left(\frac{mx}{\varepsilon}\right)\right]. \tag{6}$$

При $Q_i = 0$ для любого x, а также при $Q_i \neq 0$ для $x > 0$

$$|u_i^{(j)}(x)| \le C. \tag{7}$$

Доказательство. 1) Пусть $Q_i \neq 0$, $x \le 0$. Представим уравнение (1) покомпонентно в виде

$$\left(\varepsilon u_i' \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_x^0 a_i\,dt\right)\right)' = g_i(u_i)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_x^0 a_i\,dt\right). \tag{8}$$

Интегрируя (8) от η до 0, используя теорему о среднем значении и лемму 2, получим $|u_i'(0)| \le C\varepsilon^{-1}$. Интегрируя (8) от x до 0, получим (6) для $j = 1$.

Дифференцируя уравнение (1) и представляя его в виде (8), получим (6) при $j = 2$. Случай других j аналогичен.

2) Пусть $Q_i = 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$ или $Q_i \neq 0$, $x > 0$. Представим уравнение (1) в виде

$$\left(\varepsilon u_i' \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_x^\infty a_i\,ds\right)\right)' = g_i(u_i)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_x^\infty a_i\,ds\right).$$

Интегрируя от x до бесконечности, получим (7) для $j = 1$. Случай других j аналогичен. ■

2. Перенос краевых условий из бесконечности

В соответствие с подходом [1–4] многообразие решений уравнения (1), удовлетворяющих предельному условию на $+\infty$, зададим соотношением

$$u' = \gamma_2(u - B) + F_2(u), \tag{9}$$

где γ_2 является решением матричного квадратного уравнения

$$-\varepsilon\gamma_2^2 + a\gamma_2 + G(B) = 0, \tag{10}$$

$F_2(u)$ является решением задачи Ляпунова

$$\varepsilon(F_2)'_u[\gamma_2(u-B)+F_2(u)] + (\varepsilon\gamma_2 - a)F_2(u) = g(u) - G(B)(u-B),\ F_2(B) = 0. \tag{11}$$

Матрицу γ_2 из (10) ищем в виде асимптотического ряда по ε

$$\widetilde{\gamma_2} = \sum_{k=0}^{N} \gamma_2^{(k)}\varepsilon^k,$$

где $\gamma_2^{(k)}$ определяется на основе рекуррентной формулы

$$\gamma_2^{(k+1)} = a^{-1}\sum_{p+q=k}\gamma_2^{(p)}\gamma_2^{(q)},\ p,q \geqslant 0, \quad \gamma_2^{(0)} = -a^{-1}G(B).$$

Нетрудно показать, что $||\gamma_2 - \gamma_2^{(0)}|| \le C\varepsilon$.

На основе асимптотических разложений может быть решена и задача (11):

$$\widetilde{F}_2(u) = \sum_{k=0}^{N} F_2^{(k)}(u)\varepsilon^k,$$

$$F_2^{(k)}(u) = a^{-1}\left[\sum_{i=0}^{k-1} F_2^{(nki-1)}(F_2^{(i)})' + \gamma_2\left(F_2^{(k-1)} + (u-B)(F_2^{(k-1)})'\right)\right],$$

$$F_2^{(0)}(u) = a^{-1}(G(B)(u-B) - g(u)).$$

Теперь выделим многообразие решений уравнения (1), удовлетворяющих предельному условию на $-\infty$:

$$\varepsilon u'(x) = \gamma_1(u-A) + F_1(u), \tag{12}$$

где γ_1 является решением матричного квадратного уравнения

$$\gamma_1^2 - a\gamma_1 - G(A)\varepsilon = 0 \tag{13}$$

и $F_1(u)$ является решением задачи Ляпунова:

$$(F_1)'_u[\gamma_1(u-A)+F_1(u)]+(\gamma_1-a)F_1(u) = \varepsilon[g(u)-G(A)(u-A)],\ F_1(A) = 0. \tag{14}$$

Пусть

$$\widetilde{\gamma}_1 = \sum_{k=0}^{N} \gamma_1^{(k)}\varepsilon^k.$$

Учитывая это разложение в (13), получим рекуррентную формулу

$$\gamma_1^{(k)} = -(2\gamma_1^{(0)} - a)^{-1} \sum_{p+q=k} \gamma_1^{(p)}\gamma_1^{(q)}, \quad p, q > 0,$$

$$\gamma_1^{(0)} = a, \quad \gamma_1^{(1)} = (2\gamma_1^{(0)} - a)^{-1}G(A).$$

Пусть

$$\widetilde{F}_1(u) = \sum_{k=0}^{N} F_1^{(k)}(u)\varepsilon^k.$$

Тогда получим следующую рекуррентную формулу:

$$F_1^{(k)}(u) = -((F_1^{(0)})')^{-1}\left[\sum_{i=0}^{k-1}\left((F_1^{(i)})'\gamma_1^{(k-i)}(u-A) + \gamma_1^{(k-i)}F_1^{(i)}\right) + \sum_{j=1}^{k-1}(F_1^{(j)})'F_1^{(k-j)}\right],$$

$$F_1^{(0)}(u) = -\gamma_1^{(0)}(u-A).$$

Покажем, что решение уравнения (9) $u(x) \to B$ при $x \to \infty$. Матрица $-\gamma_2^{(0)}$ является М-матрицей, поэтому все ее собственные значения лежат в правой полуплоскости. В силу непрерывной зависимости собственных значений от элементов матрицы, при достаточно малых ε спектр матрицы γ_2 лежит в левой полуплоскости. Кроме того, $||F_2(u)|| = o(||u||)$ в соответствии с [4]. Поэтому по теореме Перрона ([7, с.343]) решение уравнения (9) $u(x) \to B$, $x \to +\infty$. Аналогичным образом решение уравнения (12) удовлетворяет предельному условию на $-\infty$.

Рассмотрим вопрос редукции исходной задачи к задаче в ограниченной области. При этом уравнения (9), (12) при фиксированном значении x используем в качестве граничных условий. Вектор-функции F_i и матрицы $\gamma_i, i = 1, 2$, присутствующие в этих уравнениях, могут быть найдены приближенно на основе полученных асимптотических разложений. В связи с этим необходимо исследовать вопрос устойчивости получаемой краевой задачи по отношению к возмущению коэффициентов в краевых условиях.

Итак, перейдем от задачи (1) – (3) к задаче на конечном интервале

$$Tu = -\varepsilon u'' + au' + g(u) = 0,\ x \neq 0,$$

$$T_0 u = \varepsilon u'(+0) - \varepsilon u'(-0) = -Q,$$
$$\varepsilon u'(L_1) = \gamma_1(u(L_1) - A) + F_1(u(L_1)),$$
$$u'(L_2) = \gamma_2(u(L_2) - B) + F_2(u(L_2)). \tag{15}$$

Предварительно рассмотрим линейный оператор

$$Lz(x) = -\varepsilon z''(x) + az'(x) + Gz(x),\ x \neq 0,\ L_1 < x < L_2,$$

$$L_0 z = \varepsilon z'(+0) - \varepsilon z'(-0),\ x = 0,$$
$$D_1 z = S_1 z(L_1) - \varepsilon z'(L_1), \quad D_2 z = S_2 z(L_2) + z'(L_2). \tag{16}$$

Лемма 5. *Пусть $G_{i,j} \le 0$, $S_{i,j} \le 0$ при всех $i \neq j$, $i, j = 1, ..., N$. Пусть существует вектор-функция $\phi(x)$ с дважды непрерывно дифференцируемыми компонентами всюду, кроме точки нуль, где сама функция непрерывна, а ее первая производная имеет разрыв первого рода, такая, что при всех $i = 1, .., N$*

$$\phi_i(x) > 0,\ L\phi_i(x) > 0,\ L_1 < x < L_2,\ x \neq 0,\ L_0\phi_i(x) \le 0,\ D_1\phi_i > 0,\ D_2\phi_i > 0. \tag{17}$$

Тогда если $\psi(x)$ – вектор-функция с дважды непрерывно дифференцируемыми компонентами всюду, кроме точки $x = 0$, то из условий

$$L\psi(x) \geqslant 0,\ L_1 < x < L_2, x \neq 0,\ L_0\psi(x) \le 0,\ D_1\psi \geqslant 0,\ D_2\psi \geqslant 0 \tag{18}$$

следует $\psi(x) \geqslant 0$, $L_1 \le x \le L_2$.

Доказательство. Определим покомпонентно следующую функцию y: $y_i(x) = \psi_i(x)/\phi_i(x)$, $i = 1, .., N$. Пусть при некоторых i, x_0 будет $\psi_i(x_0) < 0$. Тогда $y_i(x_0) < 0$.

Без ограничения общности можно считать, что $y_i(x_0) = \min\limits_{j\in\{1,..,N\}} \min\limits_{x} y_j(x)$. Если $L_1 < x_0 < L_2$, то получим противоречие, как и в лемме 1. Пусть $x_0 = L_1$. Тогда $y_i'(L_1) \geqslant 0$,

$$D_1^{(i)}\psi \leq \sum_{j=1}^{N} S_{ij}^{(1)}\phi_j(x_0)(y_j(x_0) - y_i(x_0)) + y_i(x_0)D_1^{(i)}\phi < 0.$$

Получили противоречие с условиями (8). Случай $x_0 = L_2$ аналогичен. ■

Лемма 6. *Пусть* $G_{i,j} \leq 0$, $S_{i,j} \leq 0$ *при всех* $i \neq j$, $i, j = 1, .., N$,

$$\sum_{j=1}^{N} G_{ij} \geqslant \sigma_i > \sigma > 0, \sum_{j=1}^{N} S_{ij}^{(1)} \geqslant \eta > 0, \sum_{j=1}^{N} S_{ij}^{(2)} \geqslant \eta > 0.$$

Тогда для оператора L *из* (16) *справедлив принцип максимума.*

Доказательство. Определим вектор-функцию $\phi(x)$ с компонентами $\phi_i(x) = C$. Для данной вектор-функции выполнены условия (17). Это доказывает лемму. ■

Вернемся к сформулированной на конечном интервале задаче (15). Вектор-функции F_i и матрицы γ_i в краевых условиях этой задачи из соответствующих вспомогательных задач могут быть найдены приближенно. Оценим влияние погрешностей в F_i и γ_i на решение задачи (15). Перейдем от (15) к задаче с возмущенными F_i и γ_i

$$T\widetilde{u} = -\varepsilon\widetilde{u}'' + a\widetilde{u}' + g(\widetilde{u}) = 0, \quad x \neq 0,$$

$$T_0\widetilde{u} = \varepsilon\widetilde{u}'(+0) - \varepsilon\widetilde{u}'(-0) = -Q, \quad x = 0,$$

$$\varepsilon\widetilde{u}'(L_1) = \widetilde{\gamma}_1(\widetilde{u}(L_1) - A) + \widetilde{F_1}(\widetilde{u}(L_1)),\ \widetilde{u}'(L_2) = \widetilde{\gamma}_2(\widetilde{u}(L_2) - B) + \widetilde{F_2}(\widetilde{u}(L_2)).$$

Теорема 1. *Пусть*

$$\widetilde{S}_1(v) = \widetilde{\gamma}_1 + \widetilde{F}_1'(v),\ \widetilde{S}_2(v) = -\widetilde{\gamma}_2 - \widetilde{F}_2'(v),$$

$$\widetilde{S}_{i,j}^{(1)} \leq 0,\ \widetilde{S}_{i,j}^{(2)} \leq 0,\ i \neq j, \quad \sum_{j=1}^{N} \widetilde{S}_{ij}^{(1)} \geqslant \eta > 0, \sum_{j=1}^{N} \widetilde{S}_{ij}^{(2)} \geqslant \eta > 0,\ i = 1, .., N.$$

Пусть

$$||F_1(u(L_1)) - \widetilde{F}_1(u(L_1))|| \leq \Delta_1,\ ||F_2(u(L_2)) - \widetilde{F}_2(u(L_2))|| \leq \Delta_2,$$

$$||\gamma_1 - \widetilde{\gamma}_1|| \leq \Delta_1,\ ||\gamma_2 - \widetilde{\gamma}_2|| \leq \Delta_2.$$

Тогда для любых $i \in \{1, .., N\}$, $x \in [L_1, L_2]$

$$|u_i(x) - \widetilde{u}_i(x)| \leq \frac{\Delta_1}{\eta}\Big(1 + ||u(L_1) - A||\Big) + \frac{\Delta_2}{\eta}\Big(1 + ||u(L_2) - B||\Big).$$

Доказательство. Пусть $z(x) = u(x) - \widetilde{u}(x)$. Тогда для некоторых $\Theta, \Theta_1, \Theta_2$, получим следующую задачу относительно z:

$$Lz = -\varepsilon z'' + az' + G(\Theta)z = 0, \quad x \neq 0,$$

$$L_0 z = \varepsilon z'(+0) - \varepsilon z'(-0) = 0,$$

$$D_1 z = \widetilde{S}_1 z(L_1) - \varepsilon z'(L_1) = (\widetilde{\gamma}_1 - \gamma_1)(u(L_1) - A) + \widetilde{F_1}(u(L_1)) - F_1(u(L_1)),$$

$$D_2 z = \widetilde{S}_2 z(L_2) + z'(L_2) = (\gamma_2 - \widetilde{\gamma}_2)(u(L_2) - B) + F_2(u(L_2)) - \widetilde{F_2}(u(L_2)),$$

где

$$\widetilde{S}_1 = \widetilde{\gamma}_1 + \widetilde{F_1}'(\Theta_1),\ \widetilde{S}_2 = -\widetilde{\gamma}_2 - \widetilde{F_2}'(\Theta_2).$$

В соответствии с леммой 6 для оператора L справедлив принцип максимума. Определим вектор-функцию $\psi(x)$ с компонентами

$$\psi_i(x) = \frac{\Delta_1}{\eta}\Big(1 + ||u(L_1) - A||\Big) + \frac{\Delta_2}{\eta}\Big(1 + ||u(L_2) - B||\Big) \pm z_i(x).$$

Тогда

$$L^{(i)}\psi > 0,\ L_0^{(i)}\psi = 0,\ D_1^{(i)}\psi \geq 0,\ D_2^{(i)}\psi \geq 0.$$

В силу принципа максимума $\psi(x) \geqslant 0$, что доказывает теорему. ■

3. Построение и анализ разностной схемы

Пусть Ω – равномерная сетка интервала $[L_1, L_2]$:

$$\Omega = \{x_n\ :\ x_n = x_{n-1} + h, x_{-M} = L_1, x_0 = 0, x_M = L_2,\ n \in \{-M, M\}\}.$$

Определим разностную схему для численного решения задачи (15).

1. Рассмотрим случай $Q_i \neq 0$. В этом случае при $x_n < 0$ используем схему, подогнанную к экспоненциальному изменению решения в левой полуокрестности нуля [8]. Учтем экспоненциальный рост решения и при аппроксимации условия на скачок производной при $x = 0$. При $x_n > 0$ используем схему направленных разностей. Тогда получим следующую разностную схему:

$$T_n^h u_i^h = -\widetilde{\varepsilon}_i \frac{u_{i,n+1}^h - 2u_{i,n}^h + u_{i,n-1}^h}{h^2} + a_i \frac{u_{i,n+1}^h - u_{i,n-1}^h}{2h} + g_i(u_{1,n}^h, .., u_{N,n}^h) = 0,$$

$$\widetilde{\varepsilon}_i = \frac{a_i h}{2} \coth \frac{a_i h}{2\varepsilon},\ -M < n < 0,$$

$$T_0^h u_i^h = \varepsilon \frac{u_{i,1}^h - u_{i,0}^h}{h} - \widetilde{\varepsilon}_{i0} \frac{u_{i,0}^h - u_{i,-1}^h}{h} = -Q_i,\ \widetilde{\varepsilon}_{i0} = \frac{a_i h}{1 - exp\,(-\frac{a_i h}{\varepsilon})},\ n = 0,$$

$$\widetilde{T}_n^h u_i^h = -\varepsilon \frac{u_{i,n+1}^h - 2u_{i,n}^h + u_{i,n-1}^h}{h^2} + a_i \frac{u_{i,n+1}^h - u_{i,n}^h}{h} + g_i(u_{1,n}^h, .., u_{N,n}^h) = 0, 0 < n < M,$$

$$T_{-M}^h u_i^h = \varepsilon \frac{u_{i,-M+1}^h - u_{i,-M}^h}{h} - \gamma_1(u_{i,-M}^h - A) - F_1(u_{i,-M}^h) = 0,$$

$$T_M^h u_i^h = \varepsilon \frac{u_{i,M}^h - u_{i,M-1}^h}{h} - \gamma_2(u_{i,M}^h - B) - F_2(u_{i,M}^h) = 0. \tag{19}$$

2. Рассмотрим случай $Q_i = 0$. В этом случае, как показано выше, решение задачи (15) не содержит погранслойной составляющей. Используем схему направленных разностей

$$\widetilde{T}_n^h u_i^h = 0,\ -M < n < 0,\ 0 < n < M,$$

$$\widetilde{T}_0^h u_i^h = \varepsilon \frac{u_{i,1}^h - u_{i,0}^h}{h} - \varepsilon \frac{u_{i,0}^h - u_{i,-1}^h}{h} = -Q_i,\ n = 0, \quad T_{\pm M}^h u_i^h = 0. \tag{20}$$

Теорема 2. *Пусть $u(x)$ – решение задачи (15), u^h – решение схемы (19) – (20). Тогда найдется постоянная C такая, что для любых $i \in \{1, N\}$, $n \in \{-M, M\}$*

$$|u_{i,n}^h - u_i(x_n)| \le Ch.$$

Доказательство. Определим $z^h = u^h - [u]$. Тогда нетрудно получить линейную задачу относительно z^h. В случае $Q_i \neq 0$

$$L_n^h z_i^h = -\widetilde{\varepsilon}_i \frac{z_{i,n+1}^h - 2z_{i,n}^h + z_{i,n-1}^h}{h^2} + a_i \frac{z_{i,n+1}^h - z_{i,n-1}^h}{2h} + \sum_{j=1}^{N} G_{i,j}(\theta) z_i^h =$$

$$= \widetilde{\varepsilon}_i \frac{u_{i,n+1} - 2u_{i,n} + u_{i,n-1}}{h^2} - \varepsilon u_n'' + a_i \Big(u_n' - \frac{u_{i,n+1} - u_{i,n-1}}{2h}\Big),\ -M < n < 0,$$

$$L_0^h z_i^h = T_0^h z_i^h = 0,\ n = 0,$$

$$\widetilde{L}_n^h z_i^h = -\varepsilon \frac{z_{i,n+1}^h - 2z_{i,n}^h + z_{i,n-1}^h}{h^2} + a_i \frac{z_{i,n+1}^h - z_{i,n}^h}{h} + \sum_{j=1}^{N} G_{i,j}(\theta_1) z_i^h =$$

$$= \varepsilon \Big(\frac{u_{i,n+1} - 2u_{i,n} + u_{i,n-1}}{h^2} - u_n''\Big) + a_i \Big(u_n' - \frac{u_{i,n+1} - u_{i,n}}{h}\Big),\ 0 < n < M,$$

$$L_{-M}^h z_i^h = \varepsilon \Big(u_n' - \frac{u_{i,-M+1}^h - u_{i,-M}^h}{h}\Big), \quad L_M^h z_i^h = \varepsilon \Big(u_n' - \frac{u_{i,M}^h - u_{i,M-1}^h}{h}\Big).$$

В случае $Q_i = 0$

$$\widetilde{L}_n^h z_i^h = \varepsilon \Big(\frac{u_{i,n+1} - 2u_{i,n} + u_{i,n-1}}{h^2} - u_n''\Big) + a_i \Big(u_n' - \frac{u_{i,n+1} - u_{i,n-1}}{2h}\Big),$$

$$n \neq 0,\ -M < n < M,$$

$$\widetilde{L}_0^h z_i^h = \widetilde{T}_0^h z_i^h = 0,\ n = 0,$$

$$L_{-M}^h z_i^h = \varepsilon \Big(u_n' - \frac{u_{i,-M+1}^h - u_{i,-M}^h}{h}\Big), \quad L_M^h z_i^h = \varepsilon \Big(u_n' - \frac{u_{i,M}^h - u_{i,M-1}^h}{h}\Big).$$

1. Рассмотрим случай $Q_i \neq 0$, $x_n \le 0$. Представляя $u(x)$ в виде суммы: $u(x) = p(x) + V(x)$ и учитывая, что схема точна на функции погранслоя $V(x)$, содержащей основной рост решения, получим

$$|L_n^h z_i^h| \le C + \frac{Ch}{\varepsilon + h} \exp(-a_i \varepsilon^{-1} x_{n-1}),\ |L_0^h z_i^h| \le Ch,\ |L_{\pm M}^h z_i^h| \le Ch.$$

2. Рассмотрим случай $Q_i = 0$, $x \in [-L, L]$, а также случай $Q_i \geqslant 0$, $x > 0$. В силу оценки производной $|u^{(j)}| \leq Ch$, с учетом монотонности схемы, получим

$$|L_n^h z_i^h| \leq Ch,\ |L_0^h z_i^h| \leq Ch,\ |L_{\pm M}^h z_i^h| \leq Ch.$$

Определим следующую сеточную функцию $\psi^h(x)$:

$$\psi_{i,n}^h = \begin{cases} Ch[\exp\left(a_i x_n/(2\varepsilon)\right) + \sigma] \pm z_{i,n}^h,\ Q_i \neq 0,\ n \leq 0, \\ Ch \pm z_{i,n}^h,\ Q_i \neq 0,\ n > 0, \\ Ch \pm z_{i,n}^h,\ Q_i = 0,\ n = -M, .., M. \end{cases}$$

Тогда $L_n^h \psi^h \geqslant 0$, $-M < n < M$, $x \neq 0$, $L_0^h \psi^h \leq 0$, $L_{\pm M}^h \psi^h \geqslant 0$. В силу принципа максимума при всех $i, n \quad \psi_{i,n}^h \geqslant 0$, что доказывает теорему. ■

Литература

1. Абрамов А.А., Балла К., Конюхова Н.Б. *Перенос граничных условий из особых точек для систем обыкновенных дифференциальных уравнений* // Сообщ. по вычисл. матем. М.: ВЦ АН СССР. 1981.
2. Биргер Е.С., Ляликова Н.Б. *О нахождении для некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений решений с заданным условием на бесконечности* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1965. Т.5, N 6. С.979–990.
3. Конюхова Н.Б., Пак Т.В. *Сингулярные задачи Коши с большим параметром для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1987. Т.27, N 4. С.501–519.
4. Конюхова Н.Б. *Гладкие многообразия Ляпунова и сингулярные краевые задачи* // Сообщ. по вычисл. матем. М.: ВЦ АН СССР, 1996.
5. Задорин А.И. *Численное решение уравнения с малым параметром и точечным источником на бесконечном интервале* // Сибирский журнал вычисл. матем. 1998. Т.1, N 3. С.249–260.
6. Величко О.В., Задорин А.И. *Численное решение уравнения с точечным источником на бесконечном интервале* // Математические структуры и моделирование. Омск. ОмГУ. Вып.5. 2000. С.5–10.
7. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.* М., 1958.
8. Ильин А.М. *Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной* // Матем. заметки. 1969. Т.6, N 7. С.237–248.