4. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
5. *Денисенко П. Н.* К решению задачи Коши интерполированием по квазичебышевским узлам // Дифференц. ур-ния. 1979. Т. 5. № 5. С. 908–913.
6. *Хемминг Р. В.* Численные методы. М.: Наука, 1968.
7. *Ракитский Ю. В., Устинов С. М., Черноруцкий И. Г.* Численные методы решения жестких систем. М.: Наука, 1979.
8. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений/Под ред. Холл Дж., Уатт Дж. М.: Мир, 1979.
9. *Бабушка И., Витасек Э., Прагер М.* Численные процессы решения дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1969.
10. *Gear C. W.* Numerical initial value problems in ordinary differential equations. Prentice Hall: Englewood Cliffs, 1971.

Поступила в редакцию 12.09.85
Переработанный вариант 31.05.89

УДК 519.6:517.958:53

А. И. ЗАДОРИН, В. Н. ИГНАТЬЕВ

(Омск)

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассматривается краевая задача для квазилинейного уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной. На равномерной сетке строится разностная схема, учитывающая погранслойный рост решения. Доказывается устойчивость и сходимость схемы в норме L_1.

Рассмотрим исходную краевую задачу

$$Lu=\varepsilon u''+uu'-b(x)u=f(x),\qquad u(0)=0,\quad u(1)=B. \tag{1}$$

Предполагаем, что $b(x)\geqslant\beta>0$, $1\geqslant\varepsilon>0$, b, $f\in C^1[0,1]$, $u_0(x)\geqslant\alpha>0$, где $u_0(x)$ – решение соответствующей вырожденной задачи с условием $u_0(1)=B$.

Согласно [1], при сделанных предположениях решение задачи (1) существует и единственно.

Разностные методы решения задачи (1) исследовались в [2]–[5]. В [2] предполагалось, что $u(x)\geqslant\alpha>0$, и решение находилось на основе построения разностной схемы для последовательности линеаризованных задач. В [3] строилась разностная схема, учитывающая экспоненциальный погранслойный рост решения, анализировались вопросы существования и единственности решения схемы. В [5] для квазилинейного уравнения с малым параметром в предположении, что коэффициент при первой производной строго положителен, построена схема и обоснована ее сходимость в норме L_1.

В данной работе построим разностную схему для задачи (1) с учетом погранслойного поведения решения.

В соответствии с [1], для решения задачи (1) справедливо асимптотическое представление

$$u(x)=u_0(x)+V_\varepsilon(x)+\alpha_\varepsilon(x), \tag{2}$$

где $|\alpha_\varepsilon(x)|\leqslant C\varepsilon$, $V_\varepsilon(x)$ – погранслойная функция, удовлетворяющая уравнению

$$\varepsilon V_\varepsilon''+(k+V_\varepsilon)V_\varepsilon'=0,\qquad V_\varepsilon(0)=-k,\quad k=u_0(0),\quad k>0, \tag{3}$$

$$V_\varepsilon(x)\to 0 \text{ при } x\varepsilon^{-1}\to\infty.$$

Функция $V_\varepsilon(x)$ имеет вид

$$V_\varepsilon(x)=-k+k\,\mathrm{th}[kx/(2\varepsilon)].$$

Теперь выпишем оценку устойчивости для дифференциального оператора L (см. [6]):

(4) $$\|u-v\|_1 \leqslant \beta^{-1}\|Lu-Lv\|_1,$$

где u и v – произвольные достаточно гладкие функции, совпадающие на концах интервала, и введена норма

$$\|u\|_1 = \int\limits_0^1 |u(x)|\,dx.$$

При построении разностной схемы для задачи (1) будем стремиться, чтобы схема учитывала особенности в поведении решения и чтобы для разностного аналога была справедлива оценка устойчивости вида (4). Всюду под C будем понимать положительные постоянные, не зависящие от ε и шагов сетки.

Определим равномерную сетку исходного интервала:

$$\Omega=\{x_n : x_n=x_{n-1}+h,\ x_0=0,\ x_{N+1}=1\}.$$

Нетрудно убедиться, что точная разностная схема для уравнения (3) имеет вид

(5) $$\varepsilon_n{}^0\lambda_{xx}V_n{}^h+(k+V_n{}^h)\lambda_x V_n{}^h=0,$$

где

$$\varepsilon_n{}^0=\frac{kh}{2}\operatorname{cth}[kh/(2\varepsilon)],$$

$$\lambda_x V_n{}^h=(V^h_{n+1}-V^h_{n-1})/(2h),$$

$$\lambda_{xx}V_n{}^h=(V^h_{n+1}-2V_n{}^h+V^h_{n-1})/h^2, \qquad n=1,2,\ldots,N.$$

С учетом (5) выпишем разностную схему для задачи (1):

(6) $$L_n{}^h u^h=\varepsilon_n\lambda_{xx}u_n{}^h+u_n{}^h\lambda_x u_n{}^h-b_n u_n{}^h=f_n,$$

$$u_0{}^h=0, \qquad u^h_{N+1}=B, \qquad n=1,2,\ldots,N,$$

где $b_n=b(x_n)$, $f_n=f(x_n)$,

$$\varepsilon_n=\frac{\varphi_\varepsilon(x_n)h}{2}\operatorname{cth}\frac{\varphi_\varepsilon(x_n)h}{2\varepsilon}.$$

Предполагаем, что $\varphi_\varepsilon(x)$ удовлетворяет ограничениям

$$|\varphi_\varepsilon(0)-k|\leqslant C\varepsilon, \qquad |\varphi_\varepsilon(x)-\varphi_\varepsilon(0)|\leqslant Cx,$$

$$|u(x)|\leqslant\varphi_\varepsilon(x), \qquad |u_n{}^h|\leqslant\varphi_\varepsilon(x_n), \qquad n=1,2,\ldots,N.$$

В качестве $\varphi_\varepsilon(x)$ можно выбрать верхнюю границу для решения:

$$\varphi_\varepsilon(x)=k+C_0(x+\varepsilon), \text{ где } C_0\geqslant|u_0'(x)|.$$

Определим две векторные нормы:

$$\|P^h\|_C=\max_{1\leqslant j\leqslant N}|P_j{}^h|, \qquad \|P^h\|_1=h\sum_{j=1}^N|P_j{}^h|.$$

Под нормами матриц будем понимать нормы, согласованные с соответствующими векторными нормами, при тех же обозначениях. Определим

$$M=\{P^h\in R^{N+2} : |P_n{}^h|\leqslant\varphi_\varepsilon(x_n),\ n=1,2,\ldots,N\}.$$

Лемма. *Пусть q^h и v^h – две произвольные сеточные функции из M такие, что $q_0{}^h=v_0{}^h$, $q^h_{N+1}=v^h_{N+1}$. Тогда при всех $h\leqslant h_0$ (h_0 не зависит от ε) найдется C такое,* *что*

$$\|q^h-v^h\|_1\leqslant C\|L^hq^h-L^hv^h\|_1.$$

Доказательство. Линеаризованный оператор для L^h имеет вид

$$DL_n{}^h(z^h)P^h=\varepsilon_n\lambda_{xx}P_n{}^h+z_n{}^h\lambda_xP_n{}^h-(b_n-\lambda_xz_n{}^h)P_n{}^h,$$

где z^h, $P^h\in R^{N+2}$, $n=1, 2,\dots, N$. Теперь определим

$$\Delta L_n{}^h(q^h, v^h)=\int_0^1 DL_n{}^h[v^h+s(q^h-v^h)]\,ds.$$

Тогда

$$L_n{}^hq^h-L_n{}^hv^h=\Delta L_n{}^h(q^h, v^h)(q^h-v^h), \tag{7}$$

где $n=1, 2,\dots, N$.

Для произвольной сеточной функции P^h имеем

$$\Delta L_n{}^h(q^h, v^h)P^h=\varepsilon_n\lambda_{xx}P_n{}^h+\frac{q_n{}^h+v_n{}^h}{2}\lambda_xP_n{}^h-$$

$$-\left(b_n-\frac{q_{n+1}^h+v_{n+1}^h}{4h}+\frac{q_{n-1}^h+v_{n-1}^h}{4h}\right)P_n{}^h,\quad n=1,2,\dots,N.$$

Далее будем предполагать, что $P_0{}^h=P_{N+1}^h=0$.

Пусть Q – матрица порядка $N\times N$, соответствующая разностному оператору $\Delta L_n{}^h(q^h, v^h)$, $n=1, 2,\dots, N$. Нетрудно убедиться, что матрица Q имеет диагональное преобладание по столбцам на величину δ, если при всех n будет $b_n-\lambda_{xx}\varepsilon_n\geqslant\delta>0$. Этого неравенства можно добиться, ограничив $h\leqslant h_0$, где h_0 не зависит от ε. Тогда матрица Q^τ будет иметь строгое диагональное преобладание по строкам на величину δ и, в соответствии с [7, с. 41],

$$\|\bar P^h\|_C\leqslant\delta^{-1}\|Q^\tau\bar P^h\|_C, \tag{8}$$

где $\bar P^h\in\mathbb{R}^N$; $\bar P_n{}^h=P_n{}^h$ для $n=1, 2,\dots, N$. Учитывая, что для произвольной невырожденной матрицы G

$$\|G\|_1=\|G^\tau\|_C,\qquad (G^{-1})^\tau=(G^\tau)^{-1},$$

исходя из (8), получаем $\|Q^{-1}\|_1\leqslant\delta^{-1}$. Следовательно,

$$\|\bar P^h\|_1\leqslant\delta^{-1}\|Q\bar P^h\|_1.$$

Применив это неравенство к (7), приняв $P^h=q^h-v^h$, получим утверждение леммы.

Теорема. *Пусть u^h – решение системы* (6). *Тогда*

$$\|u^h-[u]_\Omega\|_1\leqslant Ch,$$

где $[u]_\Omega$ – проекция решения задачи (1) *на сетку* Ω.

Доказательство. Согласно (2), в решении $u(x)$ можно выделить погранслойную составляющую V_ε:

$$u(x)=V_\varepsilon(x)+P_\varepsilon(x), \tag{9}$$

содержащую основной рост решения [1]:

$$\left|\frac{d^ju}{dx^j}\right|\leqslant C[1+\varepsilon^{-j}\exp(-\tau\varepsilon^{-1}x)],$$

$$\left|\frac{d^jP_\varepsilon}{dx^j}\right|\leqslant C[1+\varepsilon^{1-j}\exp(-\tau\varepsilon^{-1}x)],\qquad \tau>0,\quad j=0,1,2,3.$$

Выпишем погрешность аппроксимации схемы (6):

$$R_n=Lu_n-L_n{}^h[u]_\Omega=\varepsilon u_n''+u_nu_n'-$$
$$-\varepsilon_n\lambda_{xx}u_n-u_n\lambda_xu_n,\qquad u_n=u(x_n).$$

Учитывая соотношения (5), (2), (9), получаем

(10) $$R_n=[\varphi_\varepsilon(x_n)-k](V_n'-\lambda_x V_n)+ +\alpha_\varepsilon(x_n)(V_n'-\lambda_x V_n)+u_n(P_n'-\lambda_x P_n)+ +(\varepsilon_n{}^0-\varepsilon_n)\lambda_{xx}V_n+\varepsilon(P_n''-\lambda_{xx}P_n)+ +(\varepsilon-\varepsilon_n)\lambda_{xx}P_n, \qquad V_n=V_\varepsilon(x_n), \quad P_n=P_\varepsilon(x_n).$$

Нетрудно убедиться, что

(11) $$|\varepsilon-\varepsilon_n|\leqslant Ch, \qquad |\varepsilon_n-\varepsilon_n{}^0|\leqslant|\varphi_\varepsilon(x_n)-k|h/2.$$

Согласно [8], для произвольной достаточно гладкой функции $w(x)$ справедливы оценки

(12) $$|\lambda_{xx}w_n-w_n''|\leqslant\int\limits_{x_{n-1}}^{x_{n+1}}|w'''(s)|\,ds,$$

$$h|\lambda_{xx}w_n|, |\lambda_x w_n-w_n'|\leqslant\int\limits_{x_{n-1}}^{x_{n+1}}|w''(s)|\,ds, \qquad w_n=w(x_n).$$

Рассмотрим отдельно случаи $n=1$ и $n\geqslant2$. Пусть $n\geqslant2$. Тогда из (10) с учетом оценок (11), (12), представления решения (9) и того, что

$$\operatorname{sh}(t)\leqslant Ct(1+t)^{-1}\exp(t) \text{ при } t>0,$$

следует, что

(13) $$|R_n|\leqslant C[(h\varkappa^{-1}\varepsilon^{-1}x_n+h\varkappa^{-1})\exp(-\tau\varepsilon^{-1}x_{n-1})+h],$$

где $\varkappa=\max(h, \varepsilon)$. Учитывая, что $x_{n-1}\geqslant x_n/2$, и вновь обозначая $\tau/2$ через τ, принимая во внимание ограниченность функции $t\exp(-t)$ при $t>0$, из (13) получаем

$$|R_n|\leqslant Ch\varkappa^{-1}\exp(-\tau\varepsilon^{-1}x_n)+Ch.$$

В случае $n=1$, учитывая явный вид функции $V_\varepsilon(x)$, получаем $|R_1|\leqslant C$.

Итак, во всех узлах сетки получена оценка погрешности аппроксимации. Оценим норму этой погрешности:

$$\|R\|_1=h\sum_{j=1}^N|R_j|\leqslant Ch+\frac{Ch^2}{\varkappa}\sum_{j=2}^N\exp(-\tau\varepsilon^{-1}x_j)\leqslant$$

$$\leqslant C\{h+h^2\varkappa^{-1}[1-\exp(-\tau\varepsilon^{-1}h)]^{-1}\}\leqslant Ch.$$

Учитывая, что $R_n=L_n{}^hu^h-L_n{}^h[u]_\Omega$, и используя лемму при $h\leqslant h_0$, получаем утверждение теоремы. В случае $h\geqslant h_0$ требуемая оценка следует из того, что $\|u^h\|_1+\|u\|_1\leqslant\leqslant C$. Теорема доказана.

Разностная схема (6) представляет собой нелинейную систему алгебраических уравнений. Методы решения таких уравнений исследованы, например, в [9]. При заданной функции $\varphi_\varepsilon(x)$ требуется $k=u_0(0)$. Для этого можно воспользоваться аппроксимацией с точностью $O(h)$ вырожденного уравнения

(14) $$\overset{h}{u}_{0,n-1}=u_{0n}{}^h-hb(x_n)-hf(x_n)(u_{0n}{}^h)^{-1},$$

$$\overset{h}{u}_{0,N+1}=B, \qquad n=N+1, N, \ldots, 2, 1.$$

Остановимся на результатах численных экспериментов. Для анализируемых краевых задач в качестве точного решения принималось решение известной схемы [4] на достаточно мелкой сетке, $h=0.001$. Причем точность такого решения при малых ε контролировалось с помощью асимптотического приближения к решению. Явный вид разностной схемы из [4] применительно к задаче (1) следующий:

(15) $$\varepsilon\lambda_{xx}u_n{}^h+(\overset{h^2}{u}_{n+1}-u_n{}^{h^2})/(2h)-b(x_n)u_n{}^h=f(x_n),$$

$$u_0^h=0, \qquad \overset{h}{u}_{N+1}=B, \qquad n=1, 2, \ldots, N.$$

Для нахождения решения разностной схемы использовались методы линеаризации Ньютона и Пикара. В качестве начального приближения принимались асимптотическое приближение и прямая линия между заданными краевыми условиями. В обоих случаях методы Ньютона и Пикара сходились при всех испытываемых значениях ε и h. Как и следовало ожидать, метод Ньютона сходился быстрее, особенно если асимптотическое приближение задавать в качестве начальной итерации. Например, при $\varepsilon=0.1$ максимальная погрешность между двумя соседними итерациями была порядка 10^{-12} через 4–5 итераций.

Рассмотрим краевую задачу

$$\varepsilon u''+uu'-u=0, \qquad u(0)=0, \qquad u(1)=2.$$

В этом случае при задании $\varphi_\varepsilon(x)$ следует использовать $k=1$, $C_0\geqslant1$. В табл. 1 приведено сравнение схемы (6) при $C_0=1$ со схемой (15) при различных значениях ε, $h=0.025$. В табл. 1–3 приведены при каждом значении ε последовательно $\|z^h\|_C$ (верхнее число) и $\|z^h\|_1$ (нижнее число), где $z^h=u^h-[u]_\Omega$, u^h – решение испытываемой схемы, u – точное решение.

Остановимся на примере

$$\varepsilon u''+uu'-u=e^x, \qquad u(0)=0, \qquad u(1)=5.$$

Таблица 1

Схема	ε = 1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
(15)	$0.43\cdot10^{-2}$ $0.27\cdot10^{-2}$	$0.11\cdot10^{-1}$ $0.30\cdot10^{-2}$	0.15 $0.85\cdot10^{-2}$	$0.29\cdot10^{-1}$ $0.40\cdot10^{-2}$	$0.76\cdot10^{-2}$ $0.34\cdot10^{-2}$
(6), $C_0=1$	$0.20\cdot10^{-3}$ $0.12\cdot10^{-3}$	$0.29\cdot10^{-3}$ $0.10\cdot10^{-3}$	$0.55\cdot10^{-2}$ $0.30\cdot10^{-3}$	$0.13\cdot10^{-2}$ $0.17\cdot10^{-3}$	$0.43\cdot10^{-3}$ $0.15\cdot10^{-3}$

Таблица 2

Схема	ε = 1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
(15)	$0.21\cdot10^{-1}$ $0.12\cdot10^{-1}$	0.42 $0.51\cdot10^{-1}$	0.17 $0.16\cdot10^{-1}$	$0.16\cdot10^{-1}$ $0.82\cdot10^{-2}$	$0.16\cdot10^{-1}$ $0.89\cdot10^{-2}$
(6), $C_0=1$	$0.13\cdot10^{-2}$ $0.56\cdot10^{-3}$	$0.35\cdot10^{-2}$ $0.12\cdot10^{-2}$	$0.16\cdot10^{-1}$ $0.34\cdot10^{-2}$	$0.25\cdot10^{-1}$ $0.42\cdot10^{-2}$	$0.25\cdot10^{-1}$ $0.42\cdot10^{-2}$
(6), $C_0=2$	$0.51\cdot10^{-2}$ $0.27\cdot10^{-2}$	$0.49\cdot10^{-1}$ $0.45\cdot10^{-2}$	$0.41\cdot10^{-1}$ $0.52\cdot10^{-2}$	$0.23\cdot10^{-1}$ $0.46\cdot10^{-2}$	$0.21\cdot10^{-1}$ $0.45\cdot10^{-2}$

Таблица 3

h	ε = 1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
0.1	$0.47\cdot10^{-2}$ $0.23\cdot10^{-2}$	$0.20\cdot10^{-1}$ $0.50\cdot10^{-2}$	$0.41\cdot10^{-1}$ $0.90\cdot10^{-2}$	$0.50\cdot10^{-1}$ 10^{-2}	$0.50\cdot10^{-1}$ 10^{-2}
0.05	$0.13\cdot10^{-2}$ $0.50\cdot10^{-3}$	$0.35\cdot10^{-2}$ $0.12\cdot10^{-2}$	$0.16\cdot10^{-1}$ $0.34\cdot10^{-2}$	$0.25\cdot10^{-1}$ $0.42\cdot10^{-2}$	$0.25\cdot10^{-1}$ $0.42\cdot10^{-2}$
0.025	$0.54\cdot10^{-3}$ $0.24\cdot10^{-3}$	$0.86\cdot10^{-2}$ $0.91\cdot10^{-3}$	$0.43\cdot10^{-2}$ $0.13\cdot10^{-2}$	$0.12\cdot10^{-1}$ $0.18\cdot10^{-2}$	$0.12\cdot10^{-1}$ $0.18\cdot10^{-2}$

В данном случае значение $k=u_0(0)$ считалось по (14). Вычисление k по схеме второго порядка аппроксимации для вырожденного уравнения не привело к существенным изменениям результатов. В табл. 2 приведены нормы погрешности при различных ε для схемы (15), а также для схемы (6) с $C_0=1$, 2. Анализ табл. 1 и табл. 2 показывает, что схема из [4] уступает по точности построенной схеме (6). В табл. 3 для схемы (6) при $C_0=1$ приведены нормы погрешности при различных ε и h. Данные этой таблицы подтверждают равномерную сходимость схемы (6) в обеих анализируемых нормах.

Список литературы

1. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
2. *Емельянов К. В.* Приближенное решение сингулярно возмущенной краевой задачи с сильной нелинейностью: Препринт. Свердловск: Ин-т матем. и механ. УНЦ АН СССР, 1985.
3. *Kellog R. B., Shubin G. R., Stephens A. B.* Uniqueness and the cell Reynolds number // SIAM J. Numer. Analys. 1980. V. 17. № 6. P. 733–739.
4. *Osher S.* Nonlinear singular perturbation problems and one sided difference schemes // SIAM J. Numer. Analys. 1981. V. 18. № 1. P. 129–144.
5. *Vulanovic R.* A uniform numerical method for quasilinear singular perturbation problems without turning points // Computing. 1989. № 41. P. 97–106.
6. *Lorenz J.* Stability and monotonicity properties of stiff quasilinear boundary problems // Rev. Res. Fac. Sci. Univ. Novi Sad. 1982. V. 12. P. 151–175.
7. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1983.
8. *Задорин А. И., Игнатьев В. Н.* Численное решение сингулярно возмущенной третьей краевой задачи для обыкновенного уравнения второго порядка // Изв. вузов. Математика. 1986. № 11. С. 20–26.
9. *Ортега Д., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975.

Поступила в редакцию 25.05.87
Переработанный вариант 29.03.90

УДК 517.958

О. Г. ОДИНЦОВ, Е. А. ПУШКАРЁВ

(Харьков)

СОВМЕСТНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КВАДРУПОЛЬНОГО РАСЩЕПЛЕНИЯ И ЗАВИСИМОСТИ ИЗОМЕРНОГО СДВИГА ПО ДАННЫМ МЁССБАУЭРОВСКИХ СПЕКТРОВ

Показано, что для несимметричных мёссбауэровских спектров, представляющих собой суперпозицию дублетов, при определенных условиях можно восстановить функцию распределения квадрупольного расщепления и определить зависимость изомерного сдвига как функции от поля.

§ 1. Введение

При интерпретации мёссбауэровских спектров непрерывными методами важное значение имеет восстановление функции распределения сверхтонких полей на резонансных ядрах. С математической точки зрения, речь идет о решении интегрального уравнения [1]

$$y(x)=\int_0^\infty p(t)f(x,t)\,dt \tag{1.1}$$