12. *Горлов В. М.* О построении множеств достижимости для задачи быстродействия // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1975. Т. 15. № 2. С. 501–505.
13. *Никольский М. С.* Об одном методе аппроксимации множества достижимости для дифференциального включения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1988. Т. 28. № 8. С. 1252–1254.
14. *Veliov V.* Approximation to differential inclusion by discrete inclusion // W. P. 89-017, Internat. Inst. Appl. System Analys. Laxenburg, Austria, 1989.
15. *Комаров В. А.* Уравнение множеств достижимости дифференциальных включений в задаче с фазовыми ограничениями // Тр. МИАН СССР. М., 1988. Т. 185. С. 116–125.
16. *Благодатских Б. И.* Задача управляемости для линейных систем // Тр. МИАН СССР. М., 1977. Т. 143. С. 57–67.
17. *Дюркович Е.* Численный метод нахождения времени быстродействия с заданной точностью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1983. Т. 23. № 1. С. 51–60.
18. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.

Поступила в редакцию 06.03.90
Переработанный вариант 29.05.90

УДК 519.62

А. И. ЗАДОРИН, В. Н. ИГНАТЬЕВ

(Омск)

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КВАЗИЛИНЕЙНОГО СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассматривается квазилинейное обыкновенное сингулярно возмущенное уравнение второго порядка с краевыми условиями II рода. На неравномерной сетке строится разностная схема и обосновывается ее равномерная относительно малого параметра сходимость.

Рассмотрим исходную краевую задачу

(1а) $$T_\varepsilon u=-\varepsilon u''+a(x)u'+f(x,u)=0,$$

(1б) $$u(0)=A,\qquad R_\varepsilon u=\varkappa u(1)+\varepsilon\delta u'(1)=B.$$

Предполагаем, что

(2а) $$a\in\mathbb{C}^1[0,1],\qquad f\in\mathbb{C}^1([0,1]\times\mathbb{R}),$$

(2б) $$\partial f/\partial u\geqslant-\beta,\quad \beta>0,\qquad a(x)\geqslant\alpha>0,\qquad \varepsilon>0,$$

(2в) $$\alpha^2-4\beta\varepsilon\geqslant\gamma>0,\quad \varkappa\geqslant0,\quad \delta\geqslant0,\quad \varkappa+\delta>0.$$

В случае первой краевой задачи разностные схемы для нелинейных сингулярно возмущенных уравнений строились, например, в [1]–[6]. В [1]–[4] предполагалось $\partial f/\partial u\geqslant0$. Однако если задача (1) описывает стационарный одномерный процесс теплообмена с учетом химических реакций [7], то возможен случай $\partial f/\partial u<0$, что учтено в условиях (2). В [1] использован метод линеаризации Ньютона для исходного дифференциального уравнения. В [2] схема строится на основе аппарата точных разностных схем, сходимость схемы обеспечивается на специальной неравномерной сетке. В [3] обосновывается равномерная сходимость схемы направленных разностей на сетке, обеспечивающей равномерное изменение решения на каждом ее шаге. В [5] для квазилинейного сингулярно возмущенного уравнения построена схема и обоснована ее сходимость в L_1-норме.

Введем основные определения. Будем считать, что $P\in Q^m[0,1]$, если функция P определена на $[0,1]$ и имеет кусочно-непрерывные производные вплоть до порядка m, причем сама функция и ее производные могут иметь разрывы только I рода в заданном конечном множестве точек. Под C будем понимать положительные постоянные, не зависящие от ε и шагов сетки. Определим норму функции:

$$\|P\|=\max|P(x)|,\qquad x\in[0,1].$$

§ 1. Анализ дифференциальной задачи

Пусть L – линейный дифференциальный оператор,

$$LP=-\varepsilon P''+c(x)P'+b(x)P, \qquad x\in(0,1),$$

с краевыми условиями $P(0)$, $R_\varepsilon P$. Предполагаем, что b, $c\in Q^0[0,1]$, $\varepsilon>0$, $\varkappa\geqslant 0$, $\delta\geqslant 0$, $\varkappa+\delta>0$. Установим признак, когда для оператора L справедлив принцип максимума.

Лемма 1. *Пусть существует* $\varphi\in C^2[0,1]$ *такое, что*

$$\varphi(x)>0, \qquad x\in[0,1], \qquad L\varphi>0, \qquad R_\varepsilon\varphi>0.$$

Тогда из условий

$$P\in C^1[0,1]\cap Q^2[0,1], \qquad P(0)\geqslant 0, \qquad R_\varepsilon P\geqslant 0, \qquad LP(x)\geqslant 0, \qquad x\in(0,1),$$

следует, что $P(x)\geqslant 0$, $x\in[0,1]$.

Утверждение леммы легко получить, представив функцию P в виде произведения: $P=\varphi y$.

Лемма 2. *Пусть* p, $q\in C^1[0,1]\cap Q^2[0,1]$. *Тогда справедлива оценка*

$$|p(x)-q(x)|\leqslant\alpha^2\beta^{-1}\gamma^{-1}\exp(2\beta\alpha^{-1}x)\|T_\varepsilon p-T_\varepsilon q\|+$$
$$+|p(0)-q(0)|\exp(2\beta\alpha^{-1}x)+|R_\varepsilon p-R_\varepsilon q|(\varkappa+\alpha\delta/2)^{-1}\exp[\alpha(2\varepsilon)^{-1}(x-1)].$$

Доказательство. Определим линейный оператор

$$Lz=-\varepsilon z''+a(x)z'+[f(x,p)-f(x,q)](p-q)^{-1}z$$

с краевыми условиями $z(0)$, $R_\varepsilon z$. Тогда

$$T_\varepsilon p-T_\varepsilon q=L(p-q).$$

Определим

$$\varphi(x)=\exp(2\beta\alpha^{-1}x), \qquad r(x)=\exp[\alpha(2\varepsilon)^{-1}(x-1)].$$

Нетрудно убедиться, что

$$L\varphi\geqslant\beta\gamma\alpha^{-2}\varphi, \qquad Lr\geqslant\gamma(4\varepsilon)^{-1}r, \qquad R_\varepsilon\varphi>0, \qquad R_\varepsilon r=\varkappa+\alpha\delta/2.$$

В соответствии с леммой 1, для оператора L справедлив принцип максимума. Теперь доказательство леммы сводится к построению подходящей барьерной функции и использованию принципа максимума. Лемма доказана.

Определяя $p=u$, $q=0$, из леммы 2 получаем

$$|u(x)|\leqslant\alpha^2\beta^{-1}\gamma^{-1}\exp(2\beta\alpha^{-1}x)\|f(x,0)\|+|A|\exp(2\beta\alpha^{-1}x)+ \tag{1.1}$$
$$+|B|(\varkappa+\alpha\delta/2)^{-1}\exp[\alpha(2\varepsilon)^{-1}(x-1)].$$

Из (1.1) следует, что $\|u\|$ ограничена равномерно по ε, но может экспоненциально расти с ростом β/α.

§ 2. Построение и обоснование разностной схемы

Пусть Ω – неравномерная сетка исходного интервала:

$$\Omega=\{x_n : x_n=x_{n-1}+h_n,\ x_0=0,\ x_N=1\},$$

$$\Delta_n=(x_{n-1},x_n], \qquad n=1,2,\dots,N, \qquad h=\max h_n.$$

Для построения разностной схемы перейдем от (1) к уравнению с кусочно-постоянными коэффициентами, для которого несложно в явном виде выписать точную разностную схему. В случае линейной краевой задачи такой подход применялся, например, в [8]. При таком подходе для анализа точности возникающей разностной схемы достаточно оценить близость решений исходной и возмущенной дифференциальных задач.

Итак, от (1) перейдем к уравнению с кусочно-постоянными коэффициентами:

$$\bar T_\varepsilon V=-\varepsilon V''+\bar a(x)V'+\bar f(x,V)=0, \quad V(0)=A, \quad R_\varepsilon V=B, \tag{2.1}$$

где при $x\in\Delta_n$

$$\bar a(x)=a_n=a(x_{n-1}), \qquad \bar f(x,V(x))=f_n=f(x_{n-1},V(x_{n-1})).$$

Решение уравнения (2.1) на каждом интервале Δ_n с учетом значений на концах интервала можно выписать так:

(2.2) $$V(x)=\gamma_1^{(n)}\exp(a_n\varepsilon^{-1}x)+\gamma_2^{(n)}-f_na_n^{-1}x,$$

где коэффициенты $\gamma_1^{(n)}$ и $\gamma_2^{(n)}$ определяются из условий

$$\overset{h}{V}_{n-1}=V(x_{n-1}),\qquad V_n^h=V(x_n).$$

Исходя из требований $V\in\mathbb{C}^1[0,1]$, выпишем соотношение

$$\lim_{x\to x_n-0}V'(x)=\lim_{x\to x_n+0}V'(x),\qquad n=1,2,\ldots,N-1.$$

Подставляя сюда выражения для $V(x)$ из (2.2) для интервалов Δ_n, Δ_{n+1}, приходим к конечно-разностным соотношениям

(2.3а) $$A_n\overset{h}{V}_{n-1}-B_nV_n^h+D_n\overset{h}{V}_{n+1}=F_n,$$

(2.3б) $$A_n=\frac{a_n}{1-\exp(-a_nh_n\varepsilon^{-1})},\qquad D_n=\frac{a_{n+1}}{\exp(a_{n+1}h_{n+1}\varepsilon^{-1})-1},$$

$$B_n=A_n+D_n,\qquad V_0^h=A,$$

(2.3в) $$F_n=f_na_n^{-1}(-\varepsilon+A_nh_n)+f_{n+1}a_{n+1}^{-1}(\varepsilon-D_nh_{n+1}),\qquad n=1,2,\ldots,N-1,$$

(2.3г) $$\varkappa V_N^h+a_N\delta[1-\exp(-a_Nh_N\varepsilon^{-1})]^{-1}(V_N^h-\overset{h}{V}_{N-1})=$$
$$=B+\delta f_N\{\varepsilon a_N^{-1}-h_N[1-\exp(-a_Nh_N\varepsilon^{-1})]^{-1}\}.$$

Соотношение (2.3г) получено при подстановке $V(x)$, выраженного согласно (2.2) на интервале Δ_N, в краевое условие $R_\varepsilon V=B$.

Согласно такому методу построения, схема (2.3) является точной на функции $V(x)$. Оценим $\|u-V\|$.

Теорема 1. *Пусть u и V — соответственно, решения задач* (1) *и* (2.1). *Найдется C такое, что* $\|u-V\|\leqslant C\exp(2\beta\alpha^{-1})h$.

Доказательство. Сначала покажем, что найдется C такое, что

(2.4) $$|u'(x)|\leqslant C\{1+\varepsilon^{-1}\exp[\alpha\varepsilon^{-1}(x-1)]\}.$$

Существует q такое, что $u(1)-u(1-\varepsilon)=\varepsilon u'(q)$. Согласно (1.1), $|u(x)|\leqslant C$, поэтому $|u'(q)|\leqslant C\varepsilon^{-1}$. Интегрируя уравнение (1) от q до 1, получаем $|u'(1)|\leqslant C\varepsilon^{-1}$. Теперь уравнение (1) представим в виде

$$\varepsilon(\exp[\varepsilon^{-1}p(x)]u')'=f(x,u)\exp[\varepsilon^{-1}p(x)],$$

где

$$p(x)=\int_x^1 a(s)\,ds.$$

Интегрируя последнее уравнение от x до 1, получаем

$$\varepsilon u'(1)-\varepsilon\exp[\varepsilon^{-1}p(x)]u'(x)=\int_x^1 f(s,u(s))\exp[\varepsilon^{-1}p(s)]\,ds.$$

Следовательно,

$$|u'(x)|\leqslant C\left\{\varepsilon^{-1}\exp[-\varepsilon^{-1}p(x)]+\varepsilon^{-1}\int_x^1\exp\left[\frac{p(s)}{\varepsilon}-\frac{p(x)}{\varepsilon}\right]ds\right\},$$

откуда и следует требуемая оценка (2.4).

Оценим $|\bar{T}_\varepsilon u-\bar{T}_\varepsilon V|$. Имеем

(2.5) $$\bar{T}_\varepsilon u-\bar{T}_\varepsilon V=[\bar{a}(x)-a(x)]u'+\bar{f}(x,u)-f(x,u).$$

При $x\in\Delta_n$

$$|\bar{f}(x,u)-f(x,u)|\leqslant C\int\limits_{x_{n-1}}^{x}|u'(s)|\,ds.$$

Учитывая оценку (2.4), из (2.5) получаем

(2.6) $$|\bar{T}_\varepsilon u-\bar{T}_\varepsilon V|\leqslant Ch\{1+\varepsilon^{-1}\exp[\alpha(2\varepsilon)^{-1}(x-1)]\}.$$

Определим линейный оператор

$$\bar{L}z=-\varepsilon z''+\bar{a}(x)z'+G(x,u,V)z$$

с краевыми условиями $z(0)$, $R_\varepsilon z$, где при $x\in\Delta_n$

$$G(x,u,V)=[f(x_{n-1},u_{n-1})-f(x_{n-1},V_{n-1})](u_{n-1}-V_{n-1})^{-1},$$

$$u_{n-1}=u(x_{n-1}),\quad V_{n-1}=V(x_{n-1}).$$

При $x\in\Delta_n$

(2.7) $$\bar{L}(u-V)=\bar{T}_\varepsilon u-\bar{T}_\varepsilon V+G(x,u,V)[u-u_{n-1}-(V-V_{n-1})].$$

Нетрудно убедиться, что, как и для $u'(x)$, для $V'(x)$ справедлива оценка (2.4). Учитывая (2.4), (2.6), из (2.7) получаем

(2.8) $$|\bar{L}(u-V)|\leqslant Ch\{1+\varepsilon^{-1}\exp[\alpha(2\varepsilon)^{-1}(x-1)]\}.$$

Несложно показать, что

(2.9) $$\bar{L}\varphi\geqslant\beta\gamma\alpha^{-2}\varphi,\qquad \bar{L}r\geqslant\gamma(4\varepsilon)^{-1}r.$$

Учитывая эти неравенства, определяем барьерную функцию

$$\Psi(x)=Ch[\varphi(x)+r(x)]\pm(u-V).$$

Используя (2.8), (2.9), получаем, что для некоторого C

$$\bar{L}\Psi(x)\geqslant 0,\quad x\in(0,1),\qquad \Psi(0)\geqslant 0,\quad R_\varepsilon\Psi\geqslant 0.$$

Согласно построению, $\Psi\in C^1[0,1]\cap Q^2[0,1]$. Используя лемму 1 и применяя принцип максимума к оператору $\bar{L}$, получаем $\Psi(x)\geqslant 0$. Это доказывает теорему.

Схема (2.3) точна на функции $V(\hat{x})$, поэтому, в соответствии с доказанной теоремой, она сходится со скоростью $O(h)$ равномерно относительно параметра ε.

Разностная схема (2.3) является нелинейной системой алгебраических уравнений. Методы решения таких систем проанализированы, например, в [9].

Остановимся на результатах численных экспериментов. Рассмотрим краевую задачу

(2.10) $$-\varepsilon u''+u'-\exp(-u)=G(x),\qquad u(0)=A,\qquad \varepsilon u'(1)=B,$$

где A, B, $G(x)$ подбирались таким образом, чтобы решение задачи (2.10) имело вид

$$u(x)=\exp[(x-1)\varepsilon^{-1}]+\ln(1+x).$$

Решение схемы (2.3) находилось методом итераций Пикара. Начальная итерация $V_0^h(x)=0$ обеспечивала сходимость итерационного процесса. На каждом итерационном шаге решение находилось методом прогонки. В табл. 1 для схемы (2.3) приведена норма погрешности (сетка Ω равномерна)

$$\delta(h,\varepsilon)=\max_{x\in\Omega}|u(x)-V^h(x)|$$

Таблица 1

h	ε				
	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
0.1	$0.61\cdot10^{-1}$	$0.77\cdot10^{-1}$	0.11	0.12	0.12
0.02	$0.12\cdot10^{-1}$	$0.14\cdot10^{-1}$	$0.17\cdot10^{-1}$	$0.23\cdot10^{-1}$	$0.23\cdot10^{-1}$
0.01	$0.61\cdot10^{-2}$	$0.69\cdot10^{-2}$	$0.76\cdot10^{-2}$	$0.12\cdot10^{-1}$	$0.12\cdot10^{-1}$

Таблица 2

h	ε				
	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
0.1	$0.26 \cdot 10^{-1}$	0.93	$0.99 \cdot 10^{1}$	10^{2}	10^{3}
0.02	$0.55 \cdot 10^{-2}$	0.19	$0.20 \cdot 10^{1}$	$0.20 \cdot 10^{2}$	$0.20 \cdot 10^{3}$
0.01	$0.28 \cdot 10^{-2}$	$0.93 \cdot 10^{-1}$	$0.10 \cdot 10^{1}$	$0.10 \cdot 10^{2}$	$0.10 \cdot 10^{3}$

при различных значениях ε и h. Результаты экспериментов подтверждают, что схема (2.3) сходится равномерно относительно ε, точность схемы – порядка $O(h)$. В табл. 2 для сравнения приведены значения $\delta(h, \varepsilon)$ для схемы направленных разностей при различных ε и h.

Список литературы

1. *Емельянов К. В.* Разностная схема для сингулярно возмущенной краевой задачи с сильной квадратичной нелинейностью // Докл. АН СССР. 1986. Т. 286. № 2. С. 269–272.
2. *Боглаев И. П.* Приближенное решение нелинейной краевой задачи с малым параметром при старшей производной // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1984. Т. 24. № 11. С. 1649–1656.
3. *Лисейкин В. Д., Петренко В. Е.* О численном решении нелинейных сингулярно-возмущенных задач // Докл. АН СССР. 1987. Т. 297. № 4. С. 791–794.
4. *Задорин А. И.* Численное решение квазилинейного сингулярно-возмущенного уравнения // Числ. методы механ. сплошной среды. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1986. Т. 17. № 6. С. 35–44.
5. *Vulanovic R.* A unoform numerical method for quasilinear singular perturbation problems without turning points // Computing. 1989. № 41. P. 97–106.
6. *Задорин А. И.* Численное решение квазилинейного уравнения с малым параметром // Моделирование в механ. 1989. Т. 3. № 2. С. 89–94.
7. *Игнатьев В. Н., Задорин А. И.* Численное моделирование двумерного пламени: Препринт № 446. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1983.
8. *Сечин А. Ю.* Численный метод высокого порядка точности для сингулярно возмущенной краевой задачи // Изв. вузов. Математика. 1983. № 7. С. 75–80.
9. *Ортега Д., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975.

Поступила в редакцию 19.10.88
Переработанный вариант 14.04.89

УДК 517.958:532.5

М. Б. ТВЕРСКОЙ

(Москва)

О НОВЫХ КЛАССАХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩЕГО СТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ФЛОТИРУЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ НАД НЕРОВНЫМ ДНОМ

На основе методов теории ветвления решений нелинейных операторных уравнений исследуется уравнение, возникающее в связи с изучением стационарного течения флотирующей жидкости над неровным, периодически меняющимся дном. В околорезонансном случае получены новые решения этого уравнения, выражающиеся через неаналитические функции.

§ 1. Введение

Уравнение, описывающее стационарное, двумерное течение флотирующей жидкости (т. е. жидкости с весомой свободной поверхностью) над неровным, периодически меняющимся дном, было выведено С. А. Габовым в [1], где, кроме того, были найдены некоторые достаточно общие классы его решений. При обнулении параметра, характеризующего перепад глубины в пределах периода, что соответствует случаю ровного дна, все эти решения вырождались в тривиальные при