

**В. А. Филимонов**

# **АЛГЕБРА ЛОГИКИ И СОВЕСТИ**

**Учебное пособие для старших классов  
общеобразовательных и профильных школ**

**2006**

УДК 62.08,155.4

**АЛГЕБРА ЛОГИКИ И СОВЕСТИ** Учебное пособие /В.А. Филимонов /Вступительное слово В.А. Лефевра.- Омск: Издательство Омского государственного института сервиса, 2006.- 72 с.: илл.

Учебное пособие предназначено для преподавателей математики и школьников старших классов. Содержит введение в дисциплину «Рефлексивный анализ», а также описание её применения в многодисциплинарных исследованиях. Рассмотрены задачи измерения, формализации и интерпретации различных характеристик взаимодействия людей. В пособие включены рекомендации по проведению факультативных занятий по математике в школе.

---

© Филимонов Вячеслав Аркадьевич, 2006

## СОДЕРЖАНИЕ

	стр.
Вступительное слово В.А. Лефевра	4
Предисловие	5
1. Введение	6
2. БИПОЛЯРНЫЙ ВЫБОР	10
2.1. Основные понятия и обозначения	10
2.2. Структура «чёрного ящика» и «формула человека»	14
2.3. Эксперименты и формула человека	18
2.3.1. Выбор в условиях равенства вариантов: золотое сечение	18
2.3.2. Выбор в условиях категоризации	20
2.3.3. Рекомендации по проведению экспериментов в школе	23
3. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЛЮДЕЙ И АНАЛИЗ ОТНОШЕНИЙ	25
3.1. Технология формализации	25
3.2. Модель индивида как логический автомат	28
3.3. Структуры индивидов и этический статус	31
4. СТРУКТУРЫ ИНДИВИДОВ И ЭТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ	35
4.1. Модель ситуации как автомат с семантикой	35
4.2. Аксиомы взаимодействия добра и зла. Понятие об этических системах	40
4.3. Индекс доброжелательности и понятие совести	44
5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ	49
<i>Библиографический список</i>	50
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Булева алгебра и гамма-алгебра: основные определения и соотношения	51
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Характеристики нормативных индивидов и эксперименты по определению этической системы	57
ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Алгоритм вычисления индексов доброжелательности	61
ПРИЛОЖЕНИЕ 4. Примеры анализа и формализации	64
П4.1. Пример анализа: конфликт на работе	64
П4.2. Пример формализации: день рождения ослика Иа	67

## Вступительное слово

Есть два способа смотреть на мир. Используя один, мы видим только окружающие нас предметы; используя второй, мы способны увидеть в мире и самих себя. Такие естественные науки как физика и астрономия основаны на первом способе. Мы как бы выносим себя, созерцающих мир, «за скобки». Это значительно упрощает картину реальности, лежащую перед нами, и позволяет эффективно применять математические методы. Второй способ отражения мира имеет многовековую историю и связан с развитием философии и психологии. В рамках этой линии использование математики не было достаточно успешным. В результате возникло убеждение, что математика не способна помочь нам постигнуть устройство внутреннего мира человека, что областью ее применения является лишь внешний мир, независимый от присутствия человека. Ситуация изменилась в последние десятилетия в связи с развитием так называемого «рефлексивного подхода», в рамках которого строятся математические модели человека, способного осознавать себя. Такие модели позволили нам понять более глубоко, как люди принимают решения и делают оценки. Некоторые из этих моделей достаточно просты и доступны ученикам старших классов. Даже незначительный опыт моделирования человека вместе с его внутренним миром может помочь молодым людям лучше понимать самих себя и других людей.

Автор этого пособия, Вячеслав Аркадьевич Филимонов, с большим мастерством показывает, как с помощью математики мы можем моделировать человека, имеющего образы себя и другого человека, которые, в свою очередь, могут иметь образы себя и другого. Автор не только досконально изучил литературу по этим вопросам, но и сам провел несколько ключевых экспериментов, чтобы убедиться, что теоретические предсказания моделей действительно отражают реальность. Эта превосходная книжка будет полезна и учащимся, и педагогам.

**В.А. Лефевр**

Калифорнийский университет, Ирвин, США; 27 августа 2006 г.

## Предисловие

Это учебное пособие про то, как человек может попробовать описать процессы вроде этого: «я думаю, что он думает, что я думаю...», и про то, что в результате этот человек будет готов сделать.

Математический аппарат учебного пособия кажется достаточно простым, но он может быть освоен только при условии размышления над смыслом задач, в которых он применяется.

Владимиру Александровичу Лефевру принадлежит сама идея пособия и формулировка названия. Достаточно много времени он потратил на чтение и обсуждение первых вариантов текста во время своих приездов в Москву в 2003 и 2005 гг. Созданное им направление в рефлексивном анализе имеет математическое обоснование, которое отвечает строгим критериям научной дисциплины. При этом знание рефлексивного анализа становится в буквальном смысле слова жизненно необходимым: оно помогает человеку понять самого себя и других людей. Уникальный опыт рефлексивного анализа жизни в России и США позволил Владимиру Александровичу обнаружить глубинные основания того, что он назвал «этическими системами». Нет сомнений, что представление об этом является тем, что сейчас называется «критическими технологиями» - дисциплинами, наиболее важными для будущего.

Написание этого небольшого текста потребовало двух лет работы. При этом ясно, что создан только начальный вариант. Поэтому автор будет признателен всем тем, кто пришлет свои замечания:

по электронной почте [filimono@iitam.omsk.net.ru](mailto:filimono@iitam.omsk.net.ru) ;

в Омский филиал Института математики им. С.Л.Соболева  
Сибирского Отделения Российской Академии наук - 644099,  
Омск, ул. Певцова, 13.

## 1. Введение

Первые упоминания о способах и формах рассуждений можно найти в книгах мыслителей древнего Востока (Индия и Китай). В древней Греции великий Аристотель создал первую формализованную систему для повышения строгости и точности мыслительных процессов. За многие годы в мире разработано много методов анализа процесса рассуждений. Эти методы часто называются *логиками* (многозначная логика, нечёткая логика, темпоральная – *временная* - логика) от греческого слова *logike* – наука о способах доказательств и опровержений.

Очень важными были попытки системно, в комплексе, рассмотреть свойства внешнего мира и свойства человеческого разума, изучающего этот мир. Упомянем книги создателя декартовой системы координат Рене Декарта «Правила для руководства ума» и «Рассуждение о методе, чтобы верно направлять свой разум и отыскивать истину в науках». Ему принадлежит важное для нас высказывание: *«Можно сомневаться во многом, но нельзя сомневаться в том, что ты сомневаешься»*. Такого рода размышления о размышлениях (*рефлексия*) заложили основу *рефлексивного анализа* (от лат. *re-flexio* - отражение).

В большинстве случаев термин *«рефлексивный анализ»* понимается как инструмент философа, методолога, психолога, т.е. представителей гуманитарных наук. Однако сейчас появилась возможность сочетать строгость математического подхода с конструктивной интерпретацией полученных результатов, их применением для решения конкретных прикладных задач. Именно такой подход к рефлексивному анализу использован в этой книге.

В 1965 году Владимиром Александровичем Лефевром была предложена концепция формализации логики рефлексивного анализа. В ходе многолетних исследований им была разработана система математических моделей в комплексе с интерпретациями этих моделей и их свойств. Эти модели позволили дать строгое количественное описание ряда фундаментальных психологических

и социальных явлений. В данном учебном пособии все основные понятия рефлексивного анализа, структуры моделей, их числовые характеристики и ряд примеров заимствованы из работ В.А.Лефевра.

В настоящее время модели рефлексивного анализа и основанные на них компьютерные программы успешно применяются в США в таких актуальных направлениях как переговорный процесс, военная психология и борьба с терроризмом.

В России исследование и преподавание математических аспектов рефлексивного анализа связано, в первую очередь, с именем В. Ю. Крылова, заведующего лабораторией математической психологии Института психологии Российской Академии наук, который более 35 лет преподавал в Московском физико-техническом институте и Московском государственном университете. С 2001 г. дисциплина *«рефлексивный анализ»* изучается студентами Омского государственного института сервиса в соответствии с учебным планом специальности 351400 «Прикладная информатика (в сфере сервиса)».

Много сведений относительно приложений рефлексивного анализа содержится в Интернете на сайте Института рефлексивных процессов и управления [www.reflexion.ru](http://www.reflexion.ru) .

В этой книге предлагается описание нескольких математических моделей рефлексивного анализа, освоение которых позволит учащимся глубже понять возможности математического подхода, а также получить определённый навык, полезный при постановке и решении прикладных задач. Эти модели не нормативные (*«как надо поступать»*), а прогнозные (*«что человек сделает в этой ситуации»*). Необходимые сведения, в частности, из булевой алгебры и исчисления высказываний, приводятся по ходу создания моделей, а также в процессе описания учебных примеров и экспериментов.

Важным навыком, развитие которого необходимо математику, является построение различных интерпретаций математических выражений. В качестве примера упомянем известный из курса физики закон тяготения. Согласно ему, сила  $F$  притяжения двух тел массой  $M_1$  и  $M_2$ , находящихся на расстоянии  $R$  друг от друга описывается выражением (можно также сказать – представляется моделью)  $F = \gamma \cdot M_1 \cdot M_2 / R^2$ , где  $\gamma$  - гравитационная постоянная. Экспериментально установлено, что с помощью этой же модели можно описать интенсивности потоков автотранспорта между городами США. Только теперь вместо массы физического тела необходимо использовать численность населения города, а вместо силы притяжения мы получаем (нормированную) оценку количества поездок между городами. Естественно, теперь вместо гравитационной постоянной, имеющей чёткий физический смысл, используется коэффициент, рассчитанный по экспериментальным данным.

Можно привести ещё несколько примеров. Модели В. Вольтерра типа «хищник - жертва» (системы интегральных уравнений) – применяются для описания процессов в области экологии, экономики, и даже были использованы для описания творчества В. А. Моцарта. В последнем случае «жертвами» были идеи музыкальных произведений, зафиксированные в дневниках и письмах композитора, а «хищниками», которые уничтожали самый ценный ресурс - время, были законченные музыкальные произведения; их объем оценивался в тактах.

Модели фрактальной геометрии Б. Б. Мандельброта, которые можно выразить в форме  $L(x) = a \cdot x^{1-D}$ , хорошо описывают различные процессы в математике, компьютерной графике, физике, экономике и других областях.

Приведённые примеры демонстрируют широкий диапазон применения фундаментальных закономерностей. Рассматриваемые ниже модели также отражают определённые фундаментальные



законы и, соответственно, могут быть применены для описания различных объектов и процессов.

Некоторые интерпретации примеров выходят за рамки школьного курса математики, и в научной литературе излагаются в терминах теории вероятностей. В данном учебном пособии мы в этой части ограничиваемся рассуждениями на уровне здравого смысла, которые вполне достаточны для понимания.

Представляется крайне важным выработать у учащихся навыки междисциплинарного подхода к изучаемым предметам, который должен быть основан на научной методологии. С этой целью здесь использованы материалы ряда учебных пособий и научно-популярных изданий. Использован также опыт автора в преподавании фрагментов рефлексивного анализа в 1997 – 2006 гг. студентам-математикам Омского государственного университета им. Ф.М.Достоевского, а также студентам, обучающимся по специальности «информатик-аналитик» в Омском государственном институте сервиса.

Рассмотренные примеры могут быть связаны с примерами, изучаемыми в школе по дисциплинам «Информатика», «Человек», «Основы безопасности жизнедеятельности» и другим. Такими примерами, в частности, являются сведения по логике и алгебре высказываний, представления о внутреннем мире человека и феноменах восприятия внешнего мира, морально-этические качества личности, а также технология дезинформации. Тем самым учебное пособие способствует выработке навыков междисциплинарного, комплексного восприятия изучаемых в школе предметов.

Модели, описанные здесь, позволяют в совокупности обеспечить качественно новый уровень понимания и прогнозирования процессов поведения человека, обусловленных сложной структурой его сознания.

## 2. БИПОЛЯРНЫЙ ВЫБОР

### 2.1. Основные понятия и обозначения

Рассмотрим следующую ситуацию. Человек в течение определённого времени должен сделать выбор одного из двух **вариантов**, которые мы назовём «*Вариант А*» и «*Вариант В*». Вариантами могут быть предметы (например, *карандаш и ручка, яд и лекарство*), действия (*поехать и пойти пешком*), поступки (*солгать и сказать правду*). В конкретной ситуации паре вариантов можно поставить в соответствие пары характеристик. Примеры таких пар: «*Плохо*» и «*Хорошо*», «*Хорошо*» и «*Отлично*», «*Зло*» и «*Добро*», «*Большее зло*» и «*Меньшее зло*». Эти характеристики мы будем считать истинными (правильными, объективными). Разумеется, это можно делать только в предположении, что мы (или кто-то другой: внешний наблюдатель, эксперт и т. п.) лучше самого человека знаем, что для него плохо, а что – хорошо.

Для определённости будем считать, что *Вариант В* всегда лучше *Варианта А* и запишем это таким образом: «*Оценка Варианта А = Плохо*», «*Оценка Варианта В = Хорошо*». Для того, чтобы мы могли использовать единую терминологию для всех примеров, примем, что *Вариант А* – это негативный (или отрицательный) полюс, а *Вариант В* – позитивный (или положительный) полюс.

В конкретной ситуации человек испытывает внешнее **давление** в пользу выбора каждого из вариантов. Например, кто-то может посоветовать выбрать определённый вариант. Этим советчиком может оказаться друг, продавец, юрист, случайно встреченный мошенник. Как правило, влияние одного и того же совета, исходящего из разных источников, различно. Кроме того, наши друзья, действующие из лучших побуждений, могут ошибаться, а безразличный к нашим проблемам эксперт может дать ценный совет. Функцию советчика могут также выполнять рекламные передачи по телевидению, медицинские справочники

при выборе лекарств, форумы в Интернете. Отметим (и это нам пригодится в дальнейшем), что чем чаще человек воспринимает одну и ту же информацию, тем большее давление он испытывает от окружающего мира.

Меру (или оценку) **силы** такого **давления** мы также считаем объективной. По-другому можно сказать, что существует объективная привлекательность полюсов. У человека есть **свои** субъективные **оценки** привлекательности полюсов. Эти оценки могут совпадать с истинными оценками, но могут и отличаться. До того, как человек попал в конкретную ситуацию выбора, у него было **намерение** выбрать определённый вариант («*Я хотел бы выбрать Вариант \_\_*»).

В этой ситуации мы можем сформулировать следующую практическую **задачу 1: определить**, каким будет реально сделанный человеком **выбор**.

Научный подход состоит в том, что сначала мы должны решить теоретическую **задачу 2: построить модель**, которая будет определять зависимость выбора от ситуации.

Введём формальные обозначения:

$x_1$  = давление в сторону **позитивного** полюса (*Варианта B*);

$x_2$  = оценка человеком этого давления (его оценка значения  $x_1$ );

$x_3$  = намерение человека выбрать позитивный полюс;

$X$  = реальная готовность выбрать позитивный полюс, определяющая реальный выбор.

В итоге формально мы запишем (пока нам неизвестную) модель как

$$X = \Phi(x_1, x_2, x_3),$$

где  $\Phi(\dots)$  – функция, которую предстоит определить.

Схематически мы можем изобразить нашу модель в виде «чёрного ящика» - структуры-прототипа, которая используется в различных научных и технических приложениях (Рис. 2.1):

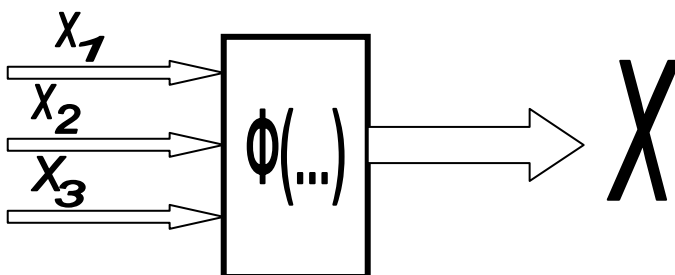


Рис. 2.1. Модель двухполюсного выбора в виде «чёрного ящика»

Само по себе введение обозначений только делает запись более короткой. Надо придать введенным обозначениям математическую интерпретацию, т.е. снабдить их такими свойствами, которые позволят производить математические операции, в частности, сравнивать между собой и измерять.

Задача выбора и создания единиц измерения и методик проведения этих измерений является сложной во многих научных и инженерных дисциплинах. В рамках этого учебного пособия мы только обозначим возможные варианты применительно к нашим задачам. Пока отметим, что если мы начнём измерять давление внешнего мира для нашей задачи в единицах давления, принятых, например, в физике (в паскалях или миллиметрах ртутного столба), то получить полезный результат невозможно.

Будем считать, что мы имеем дело с нормированными величинами, изменяющимися в диапазоне от 0 до 1. В зависимости от задач, которые мы будем рассматривать (и от методик измерения), эти величины будут по-разному вести себя внутри этого диапазона. Иногда они будут дискретными, т. е. будут принимать значения из конечного набора, одним из которых является набор, состоящий из двух символов: «0» и «1» (тогда мы сможем назвать такую величину *булевой переменной*). Мы начнём с более привычного представления наших величин как непрерывных.

Интерпретацию переменных модели мы начнём с результата – реально сделанного выбора (или реальной **готовности** сделать такой выбор). Будем считать, что утверждению «человек в такой ситуации всегда выбирает негативный полюс» соответствует математическое выражение  $X = 0$ , а утверждению «человек в такой ситуации всегда выбирает позитивный полюс» -  $X = 1$ . Тогда выражение  $X = 0,8$  мы будем использовать как математическое представление выражений «Этот человек выбирает позитивный полюс в 80% аналогичных ситуаций» и «В аналогичной ситуации 80% людей выбирают позитивный полюс». Эти оценки мы во многих случаях можем объективно зафиксировать в результате наблюдений и экспериментов. Например, нам известна статистика, относящаяся к поступлению в учебные заведения (количество поданных заявлений, результаты экзаменов, количество поступивших) и выборов в органы власти (количество принявших участие в голосовании, количество голосов, отданных за различные кандидатуры).

Практически так же можно представить и **намерение**  $x_3$ . В социологических опросах для оценки намерений служат вопросы типа: «В какое учебное заведение вы собираетесь поступать?» и «За кого вы будете голосовать на выборах?». Очень часто оценки намерений не совпадают с реально сделанным выбором.

Сложнее определить объективную  $x_1$  и субъективную  $x_2$  оценки давления внешнего мира в сторону выбора позитивного полюса. Здесь мы будем пользоваться приближенными экспертными оценками.

В некоторых случаях эта задача такой же сложности, как судейская оценка результатов соревнований, например, по фигурному катанию: она содержит определённую степень субъективности, что не мешает принять окончательное решение. В других случаях степень неопределённости оценок гораздо больше. Тем не менее, иногда это позволяет получить полезное начальное приближение. В экспериментальных ситуациях мы можем

использовать результаты множества сделанных выборов для расчета этих оценок по экспериментальным данным.

Для построения модели необходима информация о структуре «чёрного ящика». Информация может быть разделена на две группы. Первую группу образуют предположения (гипотезы) относительно того объекта или процесса, который мы моделируем. Вторую группу образуют требования к математическому аппарату, с помощью которого формируется модель. Обычно обе группы рассматриваются совместно, поскольку это позволяет не усложнять модель, если в этом нет необходимости.

## 2.2. Структура «чёрного ящика» и «формула человека»

Сформулируем основные предположения относительно нашего процесса – процесса выбора. Мы их обосновываем, т.е. приводим аргументы в пользу их правдоподобия, но не предполагаем формально доказывать. Поэтому предположения выполняют для нас функции аксиом.

### ***Аксиома 1. (Аксиома свободы реализации намерения).***

Если внешний мир принуждает человека выбрать негативный полюс ( $x_1 = 0$ ), и человек правильно оценивает это давление ( $x_2 = 0$ ), то он реализует намерение, которое у него сложилось до ситуации выбора ( $X = x_3$ ).

### ***Аксиома 2. (Аксиома незлонамеренности человека).***

Если внешний мир принуждает человека выбрать позитивный полюс ( $x_1 = 1$ ), то человек всегда его выбирает ( $X = 1$ ).

**Аксиома 3. (Аксиома *вреда излишней доверчивости*).**

Если внешний мир принуждает человека выбрать негативный полюс ( $x_1 = 0$ ), а человек неправильно оценивает это давление ( $x_2 = 1$ ), то он всегда выбирает негативный полюс ( $X = 0$ ).

Запишем эти аксиомы с помощью введённых обозначений.

Для первой аксиомы:  $x_1 = 0, x_2 = 0$ , и  $\Phi(0, 0, x_3) = x_3$ .

Для второй аксиомы:  $x_1 = 1$  и  $\Phi(1, x_2, x_3) = 1$  при любых  $x_2$  и  $x_3$ .

Для третьей аксиомы:  $x_1 = 0, x_2 = 1$  и  $\Phi(0, 1, x_3) = 0$  при любых  $x_3$ .

Теперь нужно задать математическую структуру функции  $\Phi(\cdot)$ . В самых различных приложениях математики построение моделей начинается с линейных функций. Линейные функции – один из наиболее простых в использовании инструментов математика. Использование линейного представления (линеаризации) часто позволяет получить хорошее приближённое решение в ограниченной области даже для заведомо нелинейных функций.

Предположим, что наша функция линейна относительно всех своих переменных, т.е. в общем виде может быть записана как сумма всех комбинаций переменных:

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, x_2, x_3) = & p_0 + p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_{12}x_1x_2 + \\ & + p_{13}x_1x_3 + p_{23}x_2x_3 + p_{123}x_1x_2x_3, \end{aligned}$$

где  $p_{i,j,k}$  – вещественные коэффициенты.

Теперь у нас есть всё необходимое для построения модели. Будем искать значения коэффициентов, удовлетворяющие аксиомам. Подставим в выражения соответствующие значения аргументов и функций.

Для первой аксиомы  $x_1 = 0, x_2 = 0$  и  $\Phi(0, 0, x_3) = x_3$  :

$$p_0 + p_3 x_3 = x_3, \text{ откуда } p_0 = 0, p_3 = 1.$$

Для второй аксиомы  $x_1 = 1$  и  $\Phi(1, x_2, x_3) = 1$  при любых  $x_2$  и  $x_3$  :

$$p_0 + p_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + p_{12} x_2 + p_{13} x_3 + \\ p_{23} x_2 x_3 + p_{123} x_1 x_2 x_3 = 1$$

С учётом выражения, полученного из первой аксиомы, можно записать

$$p_1 + p_2 x_2 + x_3 + p_{12} x_2 + p_{13} x_3 + p_{23} x_2 x_3 + p_{123} x_1 x_2 x_3 = 1.$$

Для третьей аксиомы  $x_1 = 0, x_2 = 1$  и  $\Phi(0, 1, x_3) = 0$  при любых  $x_3$  :

$p_0 + p_2 + p_3 x_3 + p_{23} x_3 = 0$ , откуда с учётом коэффициентов, полученных из первой аксиомы,  $p_2 + x_3 + p_{23} x_3 = 0$  и  $p_2 = 0, p_{23} = -1$ .

Подставляя значения, полученные из третьей аксиомы в уравнение, соответствующее второй аксиоме, получаем

$$p_1 + x_3 + p_{12} x_2 + p_{13} x_3 - x_2 x_3 + p_{123} x_1 x_2 x_3 = 1, \text{ откуда} \\ p_{12} = 0, p_{13} = -1, p_1 = p_{123} = 1.$$

Окончательно получаем выражение  $\Phi(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_3 - x_1 x_3 + x_1 x_2 x_3$ , которое мы будем использовать в эквивалентном виде

$$X = \Phi(x_1, x_2, x_3) = x_1 + (1 - x_1) \cdot (1 - x_2) \cdot x_3. \quad (2.1)$$

Формула (2.1) предложена В. А. Лефевром в 1991 г. и названа «**формулой человека**». У этой формулы есть много замечательных свойств. Одно из них состоит в том, что её можно записать с помощью вложенной функции (т.е. рекурсивно):



$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = F(x_1, F(x_2, x_3)), \text{ где } F(a, b) = 1 - a + a \cdot b. \quad (2.2)$$

Ценность такого представления заключается в том, что мы получаем математическую запись тезиса: *«человек воспринимает самого себя с помощью того же самого механизма, с помощью которого он воспринимает внешний мир и действует в нём»*. Действительно, оценка человеком давления внешнего мира и своего намерения (внутренние характеристики) одним и тем же образом связываются с характеристиками внешнего мира: его давлением и реальным действием человека.

Отметим дополнительно, что формула не является симметричной относительно всех своих аргументов. Асимметрия является фундаментальной характеристикой живых организмов. Пример структурной асимметрии организма человека: сердце смещено относительно позвоночника. Пример функциональной асимметрии: левое полушарие мозга обычно определяет рациональные, логические функции, речь, а правое – воображение, визуальное восприятие. Как мы убедимся далее, асимметрия модели отражает асимметрию выбора.

## 2.3. Эксперименты и «формула человека»

Формула (2.1) позволила дать корректное описание многим феноменам человеческого восприятия. Рассмотрим несколько примеров, для которых были проведены тщательно спланированные эксперименты, и выполнена обработка результатов с использованием методов математической статистики.

### 2.3.1. Выбор в условиях равенства вариантов: золотое сечение

Распространённой ситуацией является выбор в условиях, когда оба варианта являются объективно одинаковыми (одинаково хороши или одинаково плохи), а последствия выбора не настолько важны, чтобы долго их анализировать. На первый взгляд, в этих условиях каждый вариант должен быть выбран с одинаковой частотой по 50% для каждого. Однако эксперименты показывают, что это далеко не так. В классическом эксперименте по сортировке фасоли, когда требовалось практически одинаковые зёрна рассортировать по группам «хорошие» и «плохие», пропорция в результате оказывалась близкой к 62% и 38% (либо обратной: 38% хороших и 62% плохих).

Объяснение даёт формула (2.1). Построим интерпретацию переменных. Поскольку зёрна одинаковы, объективное давление в пользу выбора любого из вариантов также одинаково, т.е.  $x_1 = 0,5$ . Поскольку выбор любого из вариантов серьёзными последствиями не грозил, можно считать, что реально сделанный выбор  $X$  совпадал с намерением  $x_3$ :  $X = x_3$ . Логично также предположить, что намерение  $x_3$  будет в рамках нашей модели полностью совпадать с оценкой  $x_2$  давления (предпочтения определённого полюса) участником эксперимента:  $X = x_3 = x_2$ . При этих предположениях формула (2.1) даёт нам уравнение для определения того, каким будет реальный выбор:

$$X = 0,5 + (1 - 0,5) \cdot (1 - X) \cdot X. \quad (2.3)$$

Окончательно мы получаем квадратное уравнение  $X^2 + X - 1 = 0$ , откуда (отбрасывая отрицательный корень), получаем

$$(\sqrt{5} - 1) / 2 \approx 0,618.$$

Полученное соотношение  $0,618/0,382$  ( $0,382=1-0,618$ ) известно с древности как «*золотое сечение*» или «*золотая пропорция*». Происхождение такого названия обусловлено задачей, актуальной для архитекторов древней Греции: разделить отрезок  $A$  на две части  $B$  и  $C$  таким образом, чтобы отношение большей части  $B$  отрезка к меньшей части  $C$  равнялось отношению всего отрезка к большей части:  $B/C = A/B$ ,  $A=B+C$ .

Отметим особенности рассмотренного случая. В жизни не бывает ситуаций, подобной ситуации известного «буриданова осла», который погиб от голода, не сумев выбрать, к какой из двух абсолютно одинаковых охапок сена следует подойти в первую очередь. Абсолютно одинаковых вариантов не бывает: например, один из них представляется человеку первым (раньше), или находится левее другого и т.п. Предпочтения при выборе могут зависеть от многих причин. Так, известный специалист в области программирования Э. Дейкстра отмечал, что при разработке алгоритмов сортировки объекты, как правило, выбирались студентами в направлении «слева – направо». Исключения составляли случаи, когда студенты – арабы и израильтяне – выбирали направление «справа - налево», соответствующее направлению письменности в соответствующих странах. Такого рода факторами может определяться выбор конкретного полюса в качестве позитивного, и, соответственно, результаты выбора.

### 2.3.2. Выбор в условиях категоризации

Существуют особенности восприятия различных характеристик, обусловленные не только органами чувств человека, но и схемами мыслительных процессов, которые организуют это восприятие. Проиллюстрируем это примерами.

Рассмотрим задачу оценки длины объектов при различных условиях. Объектами в экспериментах были линии, нарисованные на бумаге, а также металлические стержни. Условия эксперимента оказывают существенное влияние на результаты. Вспомним классический пример оптической иллюзии. На рис. 2.2 изображены два одинаковых горизонтальных отрезка прямой линии, однако обычно правый отрезок воспринимается как более длинный.



Рис. 2.2. Пример оптической иллюзии восприятия длин отрезков

Убедиться в том, что отрезки одинаковы, можно двумя способами. Первый – традиционный: можно измерить их линейкой. Второй – можно создать такое изображение самостоятельно на бумаге или экране компьютера. Нужно создать два отрезка одинаковой длины и добавить на концах отрезков конструкции (уголки), создающие требуемый эффект.

Продолжим анализ этого случая. На рис. 2.3 представлен исходный отрезок и его копия с одновременным использованием конструкций для создания иллюзий удлинения и укорачивания. При этом наблюдается частичная компенсация иллюзий. Заметим, что эффект компенсации наблюдается и в других системах. Примеры: нагревание и охлаждение в физике, кислота и щёлочь в химии, препараты для расширения и сужения кровеносных сосудов в медицине и т.п.

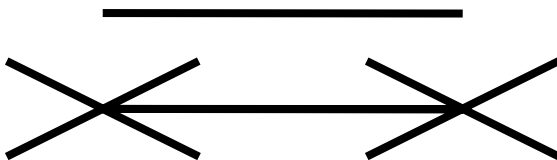


Рис 2.3. Использование противоположных конструкций

Эксперименты по оценке длины стальных стержней дали парадоксальные результаты. Одинаковые наборы стержней оценивались одними и теми же людьми по-разному в зависимости от условий эксперимента. В первом случае испытуемым требовалось дать количественную оценку длины каждого стержня в заданных единицах (дюймах и сантиметрах). В другом случае испытуемым показывали самый короткий и самый длинный стержни, и сообщали, что стержни надо разделить по длине на категории (другими словами, на группы или классы), причём самый короткий стержень соответствует 1-ой, а самый длинный – 11-ой категории.

Результаты показали, что в первом случае оценки, в среднем, были пропорциональны длинам измеряемых стержней. Конечно, при этом происходила как недооценка, так и переоценка длины, но количество тех и других ошибок было примерно одинаковым.

Во втором случае наблюдалась систематическое превышение средних оценок категорий относительно их истинных значений. Результаты экспериментов иллюстрируются графиками на рис. 2.4.

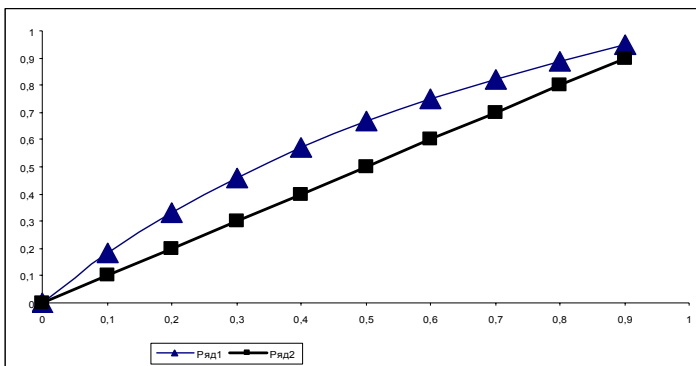


Рис. 2.4. График средних значений экспериментальных оценок длин стержней; (Ряд 1) – оценка в категориях, (Ряд 2) – нормированная оценка в метрических единицах

Снова объяснение мы найдём с помощью формулы (2.1). Будем считать, что негативному полюсу соответствует короткий стержень (категория 1), а позитивному – длинный стержень (категория 11). Объективное давление  $x_1$  в пользу выбора категории пропорционально длине конкретного стержня. Субъективная оценка  $x_2$  определяется тем, что ожидает увидеть испытуемый. В рамках нашей модели величина этого ожидания пропорциональна средней длине всего набора стержней, который показывался в ходе всего эксперимента. Более детально: большее количество коротких стержней уменьшает  $x_2$ , а большее количество длинных – увеличивает её. Если все категории стержней предъявляются одинаковое число раз, то  $x_2 = 0,5$ . Снова можно считать, что реально сделанный выбор  $X$  совпадал с намерением  $x_3 : X = x_3$ . При этих предположениях формула (1.1) даёт нам уравнение

$$X = x_1 + (1 - x_1) \cdot (1 - x_2) \cdot X ,$$

откуда мы получаем выражение для определения экспериментальной оценки:

$$X=x_1/(x_1+x_2-x_1 \cdot x_2). \quad (2.4)$$

Выражение (2.4) позволяет также объяснить феномен изменения кривизны категориальной оценки при изменении частоты предъявления разных категорий стержней. Чем чаще предъявляются более длинные стержни, тем ближе категориальная кривая к прямой линии. Наоборот, увеличение частоты демонстрации коротких стержней приводит к увеличению выпуклости кривой категориальной оценки. Этот эффект объясняется изменением оценки  $x_2$ , как это отмечено в предыдущем абзаце.

### 2.3.3. Рекомендации по проведению экспериментов в школе

Как показывает опыт преподавания, участие в экспериментах студентов и школьников существенно повышает степень понимания материала, а также мотивацию к изучению предмета. Сами эксперименты могут быть организованы с использованием практически любого подручного материала. Наличие компьютерного класса позволяет провести описанные выше эксперименты с приемлемой трудоёмкостью их реализации.

Примерная технология реализации состоит в следующем. Эксперимент состоит в просмотре учащимися фильма на экране компьютера (мультимедиа-проектора), и индивидуальной регистрации своих оценок каждым из участников эксперимента. Фильм (презентация) готовится с помощью системы **PowerPoint** - стандартного компонента **Microsoft Office**. Объекты, подлежащие оценке, размещаются на слайдах (кадрах фильма). При этом объекты просто копируются и масштабируются. Смена слайдов может осуществляться вручную, либо в автоматическом режиме, путём задания времени смены кадров. Для усложнения эксперимента можно использовать анимацию. Оценки затем обрабатываются с помощью системы электронных таблиц **Excel**.

Подготовку фильма и обработку результатов может осуществить инициативная группа учащихся.

В качестве объектов, размеры которых подлежат оценке, можно использовать имеющиеся в Интернет фотографии кораблей, неопознанных летающих объектов, лесных пожаров, смерчей и т.п. Выбор объекта делается таким образом, что для одних объектов большая величина ассоциируется с позитивным полюсом (*«чем больше, тем лучше»*), а для других – с негативным (*«чем меньше, тем лучше»*).

Обсуждение результатов позволяет прояснить значение любой модели как способа объяснения части ситуации, и одновременно подчеркнуть многоплановость реальных ситуаций, наличие ошибок, отклонений. Могут быть использованы аналогии с проявлениями на практике законов физики (например, наличие отклонений результатов измерений в электрических цепях при проверке закона Ома).

Следующим этапом является обсуждение с учащимися проектов других экспериментов по анализу возможностей изученных вариантов модели. В частности, могут быть использованы результаты по анализу взаимосвязи самооценки личности и оценки характеристик другого человека, а также по анализу итогов референдумов.



### 3. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЛЮДЕЙ И АНАЛИЗ ОТНОШЕНИЙ

#### 3.1. Технология формализации

В соответствии с современной технологией многодисциплинарных исследований мы будем считать, что всё, относящееся к нашей задаче, изображается на многооконном экране. Именно такую технологию поддерживает операционная система *Windows*: она позволяет на экране компьютера открывать сразу несколько окон (например, текстовый редактор *Word*, электронные таблицы *Excel* и т.п.). В результате мы можем наблюдать одновременно исходные предпосылки и результаты моделирования. Далее мы построим такой экран.

Мы будем различать ситуации **понимания** (непонимания) и **знания** (незнания). Ситуация понимания означает, что у индивида есть структура, в соответствии с которой он пользуется своим знанием. Такой структурой может быть описанный выше многооконный экран или применяемые в исследованиях по искусственному интеллекту *семантические сети* и *когнитивные карты*: графическое представление различных объектов и их связи. Непонимание – это отсутствие такой структуры. Знание о чём-то – это информация, находящаяся в соответствующем окне экрана. Незнание – знание о том, что в соответствующем окне экрана такой информации нет. В качестве примера незнания рассмотрим ситуацию, в которой человеку задают вопрос: «*Какая температура была 10 лет назад в этот день на Северном полюсе?*». Человек понимает вопрос, но он не знает требуемого ответа. Если вопрос «*Как тебя зовут?*» задать на незнакомом человеку языке, то возникнет ситуация непонимания: человек фактически обладает требуемой информацией, но не может её использовать.

Сначала мы проведём формализацию нашей задачи, что позволит представить её в максимально общем и компактном виде. Затем мы введём правила оперирования с компонентами формализованной записи. Такого рода преобразования превращают символические представления в модели. Именно модель позволяет осуществлять анализ и прогноз в соответствии со своим назначением. Подчеркнём, что наш экран – это своеобразный исследовательский комплекс, а модель – это его часть. Это замечание делается для того, чтобы пояснить, как, например, при использовании булевой модели, которая оперирует только двумя символами «0» и «1», мы получаем результаты, выражаемые вещественными числами.

Для дальнейшего изложения нам потребуется провести формализацию осознания ситуации действующими в ней лицами. При этом мы будем использовать только минимальное количество фактов и предположений, относящиеся к структуре сознания. Будем предполагать возможность для нас, как внешнего наблюдателя, и для рассматриваемых действующих лиц различать состояния «добро» и «зло», не конкретизируя их. Такой подход мы уже использовали, введя понятия «*позитивный полюс*» и «*негативный полюс*» в модели, рассмотренной ранее.

Мы также предполагаем, что человек различает эти состояния, но при этом может совершать ошибки.

В детской психологии описаны такие эксперименты. Маленького ребёнка спрашивают: «*Ты знаешь, как тебя зовут?*». Совсем маленькие дети на этот вопрос отвечают: «*Маша*» или «*Петя*», т.е. называют своё имя. Дети постарше отвечают: «*Да, я знаю, как меня зовут*». Таким способом психологи определяют стадию развития психики ребёнка, точнее, появление у него осознания (о-со-знания – знания о самом себе). Можно также сказать, что у ребёнка формируется **образ себя**.

То, что это разные уровни сознания, можно продемонстрировать и другим, всем известным фактом.

Каждому приходилось произносить и слышать от других фразы подобные этой: *«Я знаю это, но забыл, и попробую вспомнить»*. На этом уровне мы можем различить знание (как некоторую информацию) и знание об этом знании. К этому же уровню относятся утверждения о незнании, например: *«Я абсолютно уверен, что не знаю китайского языка»*. Великому мыслителю древней Греции Сократу принадлежит высказывание: *«Я знаю, что я ничего не знаю»*.

Подчеркнём, что уверенность в собственном знании или незнании, а также о знании и незнании других людей может быть ошибочной с точки зрения внешнего наблюдателя. Например, долгое время истинным считалось утверждение: *«Солнце вращается вокруг Земли»* и, соответственно, человек мог утверждать, что он это знает как научный факт. При некоторых заболеваниях мозга (амнезия) человек может утверждать, что он не знает своего имени, однако врачи способны помочь ему это вспомнить (ситуация *«он не знает, что он знает»*).

Рассуждение, которое мы с вами только что провели, относится уже к следующему уровню – знанию о том, что мы знаем то, что мы знаем (или не знаем). Запишем примеры, используя скобки для разделения уровней:

- *«Я знаю, что (Я знаю, что (« $2+2=4$  в десятичной системе счисления»))»*);
- *«Я знаю, что (Я НЕ знаю («Как записать число  $\pi$  с тридцатью знаками после запятой»))»*.

Аналогичным образом мы можем выразить свои представления о знании или незнании других людей, например: *«Я знаю, что он не знает этой теоремы»* и *«Я знаю, что он знает, что мы придём к нему на день рождения»*.

Возникает вопрос, сколько уровней рассуждений вообще может быть? Можно показать, что для многих задач достаточно рассмотренных трёх уровней. Задачи с большим числом уровней также существуют, но в рамках этого учебного пособия мы ограничимся тремя уровнями.

### 3.2. Модель индивида как логический автомат

Построим сначала модель одного индивида. Будем считать, что на вход модели подаётся последовательность входных сигналов  $x$  внешней среды (состояния внешнего мира), реакцией на которые являются выходные сигналы  $X$ . Как входные, так и выходные сигналы могут принимать только одно из двух значений: 0 или 1.

Для описания работы автомата используются операции булевой алгебры (см. Приложение 1): отрицание ( $\bar{a}$ ), логическое сложение ( $+$ ), логическое умножение ( $\bullet$ ) и импликация, которая определяется как  $b \rightarrow a = \bar{b} + a$ . Мы будем использовать эту функцию в записи, напоминающей экспоненту:  $b \rightarrow a = a^b$ .

Выражение  $(c \rightarrow b) \rightarrow a$  будем записывать как  $a^{b^c}$  и вычислять в соответствии с правилом  $a^{(b^c)}$ .

Структура модели представлена на рис. 3.1.

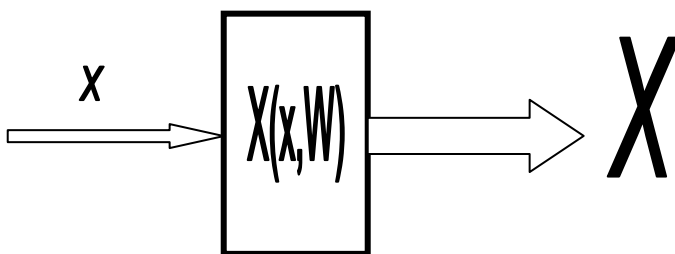


Рис. 3.1. Структура модели индивида в форме логического автомата

Каждый индивид может быть представлен формулой, состоящей из **корня индивида**  $x$  - реального состояния, и внутреннего мира  $W$ :  $X = x^W$ . Внутренний мир, в свою очередь, состоит из **образа себя**  $v$ , который индивид считает настоящим. Кроме того, у этого образа может быть (а может и отсутствовать) свой собственный образ – **образ себя у образа себя**  $\mu$ :  $W = v^\mu$ , и мы можем назвать  $v$  **корнем образа себя**. В итоге индивид может быть представлен формулой (3.1), содержащей три уровня:

$$X = x^{v^\mu}. \quad (3.1)$$

Будем называть введённые переменные **эквивалентными**, если они будут принимать одинаковые значения во всех рассматриваемых случаях. Будем также говорить, что у индивида **корректный образ себя**, если корень образа себя  $v$  эквивалентен корню индивида  $x$ , иначе мы будем говорить, что у индивида **некорректный образ себя**.

Поясним введённые термины. Термин «образ себя» относится к непосредственному восприятию себя индивидом: его чувства, ощущения, эмоции. Термин «образ у образа себя» относится к такому представлению, которое индивид сам сознательно сформировал в результате своих размышлений. Например, человек может чувствовать себя на уроках физкультуры замечательным спортсменом (это «образ себя»), а после просмотра видеозаписей этих уроков более скромно оценить свои достижения (это «образ себя у образа себя»).

С учетом введённых обозначений мы можем использовать схему «матрёшки» (рис. 3.2), на которой уровни осознания представлены системой вложенных изображений. Уровень (степень) переменной в формуле (3.1) соответствует уровню вложенности соответствующего образа в «матрёшке».

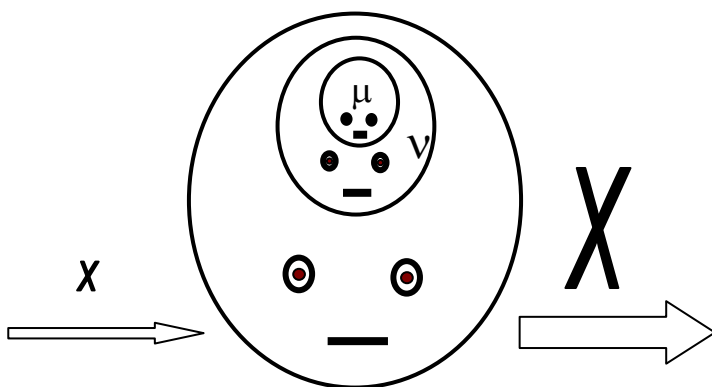


Рис. 3.2. Структура модели индивида с учетом уровней осознания

Схему рис. 3.2. мы можем использовать для более детализированного описания ситуаций. Если мы будем использовать такие графические средства, как штриховку (или цвет), мы сможем изобразить очень сложные ситуации. Примеры изображения сомнений приведены на рис. 3.3. Индивид, соответствующий рис. 3.3. а, испытывает чувство вины или огорчения (он чувствует, что поступил плохо:  $\nu = 0$ ), но его образ себя у образа себя противоречит этому ощущению:  $\mu = 1$ . Индивид, соответствующий рис. 3.3. б, доволен своим поступком:  $\nu = 1$ , но его образ себя у образа себя также противоречит этому ощущению:  $\mu = 0$ . С точки зрения внешнего наблюдателя в обоих случаях был совершён хороший поступок:  $x = 1$ .

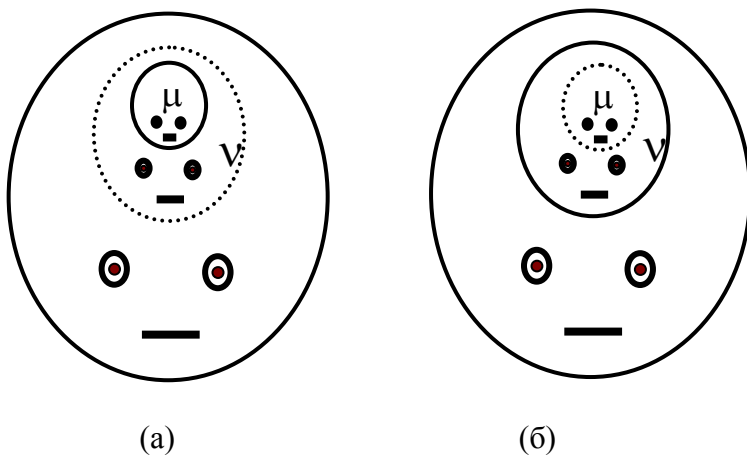


Рис. 3.3. Структура модели сомнений с учетом уровней осознания; (а) – не соответствующее реальности (некорректное) представление поступка; (б) – корректное представление поступка.

### 3.3. Структуры индивидов и этический статус

Мы будем иметь право говорить о введённом представлении как о математической модели, когда определим процедуру (алгоритм) вычисления реакции индивида на входные воздействия. Для этого нам потребуются особый математический аппарат: булева алгебра и гамма-алгебра. Необходимые сведения приведены в Приложении 1. Сейчас нам достаточно знать, что вычисления по

формуле (3.1)  $X = x^{\nu^{\mu}}$  производятся по правилам:

$$a^b = a + (1 - b) \text{ и } a^{b^c} = a + (1 - b) \bullet c.$$

Теперь мы можем приступить к вычислениям и их дальнейшей интерпретации. Рассмотрим простейшие случаи: индивидов с корректным и некорректным образом себя, а также с полным

отсутствием рефлексии, т.е. размышлений о правильности своих представлений о себе и мире и, соответственно, уверенности или сомнений в этих образах. Составим таблицу всех возможных комбинаций воздействия внешнего мира и реакции индивида (Табл. 3.1).

Таблица 3.1 Описание простейших индивидов

Входное воздействие	Реакция индивида, у которого образ себя	
	корректный $a^a$	некорректный $a^{\bar{a}}$
1	1	1
0	1	0

Попробуем теперь дать количественную характеристику этим индивидам. Мы можем назвать нашу оценку *статусом* (латинское «*status*» - состояние, положение). Поскольку мы пользуемся для интерпретации терминами «добро» и «зло», относящимися к сфере этики (греческое «*эмос*» - обычай, нрав, характер), назовём нашу характеристику *этическим статусом*. Теперь представим модель мира как множество из  $N$  входных воздействий. Хорошие и плохие воздействия (значения «1» и «0») появляются одинаково часто, т.е. из  $N$  воздействий каждое появляется  $N/2$  раз. Этический статус каждого индивида мы будем вычислять как среднее значение его реакций: для первого индивида оно равно 1 (поскольку других значений выходной реакции нет), а для второго равно  $(0 \cdot N/2 + 1 \cdot N/2) / N = 0,5$ . Этический статус второго индивида будет пропорционален «качеству» внешнего мира, т.е. количеству позитивных воздействий, но никогда не будет больше единицы.

Важно понимать, что этический статус тесно связан с качеством внешнего мира: для «очень хорошего» мира (входные воздействия – только единицы) этический статус двух рассмотренных индивидов одинаков и равен 1. Для «очень плохого» мира (входные



воздействия – только нули) некорректный образ себя понижает этический статус до минимума, в данном случае – до нуля.

Подчеркнём, что этический статус индивида – характеристика с позиции внешнего наблюдателя; сам индивид определить его не может. Однако он может определить собственный образ этой характеристики. Как это происходит, мы рассмотрим позже.

Обратим внимание, что модель, созданную на основе булевой алгебры, где есть только два значения (которые в общем случае даже не являются числами), мы анализируем с помощью формулы (обычно применяемой в математической статистике), оперирующей как целыми, так и дробными величинами.

Оценим теперь значения этического статуса для индивидов, которые способны сомневаться. Модели и значения реакций индивидов приведены в Табл. 3.2.

Таблица 3.2. Характеристики индивидов, потенциально способных сомневаться

Входное воздействие $x$	Наименование, формула, описание и реакция индивида			
	1	2	3	4
	Прагматик	Скептик	Мудрец	Глупец (Простак)
	$a^a$	$a\bar{a}$	$a^a\bar{a}$	$a\bar{a}\bar{a}$
	корректный образ себя И отсутствие сомнений (рис 3.2)	некорректный образ себя И сомнение в корректности (рис. 3.3.а)	корректный образ себя И сомнение в корректности (рис. 3.3. б)	некорректный образ себя И отсутствие сомнений
1	1	1	1	1
0	0	0	1	0

Чтобы структуры было легче запомнить, индивиды ассоциированы с персонажами, известными из литературы. Для трех персонажей даны ссылки на соответствующие им рисунки. Четвертый рисунок можно построить в качестве самостоятельного упражнения.

Обратим внимание на то, что наивысший этический статус, равный 1, имеет Мудрец, который сомневается в корректности корректного образа себя. Этический статус остальных индивидов равен 0,5. Отметим также, что введение «третьего этажа» - возможности сомневаться (которой можно и не воспользоваться) – может понизить этический статус даже в случае корректного образа себя (тип «Прагматик»). Напомним, что значение этического статуса зависит от качества внешнего мира. Напомним также, что реальный (для наблюдателя) этический статус и *образ* этого этического статуса у индивида – разные вещи.

## 4. СТРУКТУРЫ ИНДИВИДОВ И ЭТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

### 4.1. Модель ситуации как автомат с семантикой

Теперь мы можем приступить к анализу общей модели взаимодействия двух индивидов  $A$  и  $B$ . Схема автомата для модели взаимодействия, аналогичная схеме на рис. 3.1, представлена на рис. 4.1.

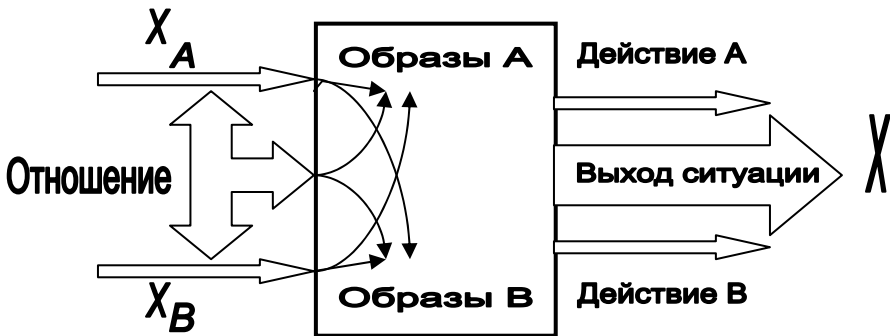


Рис. 4.1. Схема автомата для описания ситуаций взаимодействия

У нас есть общая схема. Однако для проведения вычислений и осмысления их результатов необходимо детализировать интерпретацию ситуации (ввести семантику автомата – придать смысл значениям его входов, выходов и внутренних переменных).

Для представления каждого из индивидов мы будем использовать модель индивида, которую уже рассмотрели. Однако здесь нам потребуются новые компоненты: отношения между индивидами, и образы этих отношений в сознании участников ситуации взаимодействия. Отношение участников друг к другу и представление ими этих отношений мы будем обозначать переменной  $r$  (от слова «*relation*» - отношение). Будем описывать ситуацию «матрешечной» схемой рис. 4.2. по аналогии с рис. 3.2.

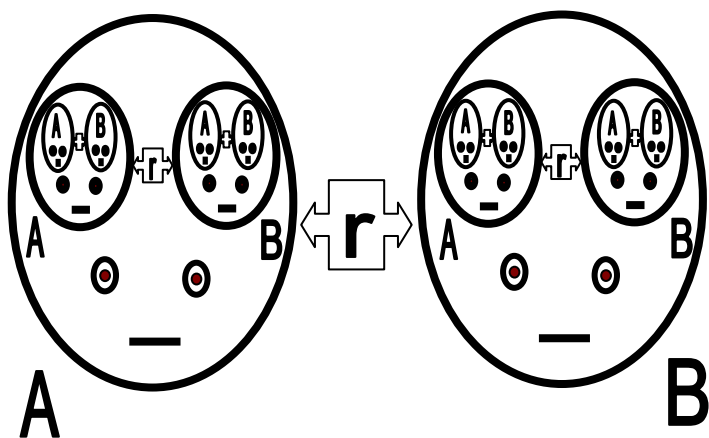


Рис. 4.2. Схема взаимодействия двух индивидов

Определим компоненты схемы, которые мы будем использовать. Для построения формализованной записи мы будем считать, что  $A$  и  $B$  - это переменные для обозначения индивидов - участников взаимодействия в реальности и в представлениях самих участников. Если представления соответствуют реальности, мы будем считать, что эти переменные принимают соответственно значения  $a$  и  $b$ , в противном случае  $A = \bar{a}$  и  $B = \bar{b}$  (что эквивалентно соответственно выражениям  $A = (1 - a)$  и  $B = (1 - b)$ ).

Отношение участников друг к другу и представление ими этих отношений мы условились обозначать переменной  $r$ . Отношения между участниками мы можем определить как «союз» или «конфликт». Может быть также, что мы (и участники) затрудняемся определить тип отношения. В этом случае будем считать, что переменная  $r$  принимает значение \*

(«неопределенное»). Логично считать это отношение чем-то средним между союзом и конфликтом.

В результате мы можем записать ситуацию  $S$  на нашем экране в виде формулы:

$$S = A^A A^{ArB} rB^{ArB} rB^A A^{ArB} rB^{ArB}, \quad (4.1)$$

где  $A = a, \bar{a}; B = b, \bar{b}; r = "+", "\bullet", *$ .

У нас есть схема и формула, соответствующая схеме. Однако для проведения вычислений и осмысления их результатов необходимо придать смысл значениям его входов, выходов и внутренних переменных (более строго - построить интерпретацию ситуации: ввести семантику автомата).

Будем предполагать, что когда участник ситуации определил для себя все компоненты (элементы) ситуации как хорошие или плохие, он способен испытывать определённые чувства. Введём терминологию для описания ситуации с позиций её участников (Табл. 4.1).

Таблица 4.1. Характеризация участником ситуации её компонентов

Компонент (предмет оценки)	Оценка компонента	
	«1» (Позитивная)	«0» (Негативная)
Собственное поведение	Гордость	Вина
Поведение партнёра	Одобрение	Обвинение (Осуждение)
Ситуация в целом	Комфорт	Страдание

В качестве примера рассмотрим (по аналогии с подходом в теории игр) варианты взаимодействия человека с погодой. Пример, приведённый в Таблице 4.2, демонстрирует разнообразие возможных реакций и оценок.

Таблица 4.2. Чувства индивида при взаимодействии с погодой

Действия индивида	Состояние погоды	
	Хорошая (солнечный день)	Плохая (холодный дождь)
<b>Сотрудничество</b> (вышел налегке)	<i><b>Гордость</b> (Я был прав, и мне не надо нести тяжелый зонтик) <b>Одобрение</b> (хорошая погода, всегда бы так!) <b>Комфорт</b> (прогулка удалась!)</i>	<i><b>Вина</b> (Я ошибся: надо было взять зонтик и теплее одеться) <b>Обвинение</b> (зачем этот холодный дождь?) <b>Страдание</b> (мне холодно, и я, наверное, заболею...)</i>
<b>Конфронтация</b> (взял зонтик)	<i><b>Вина</b> (несчастный пессимист, всегда я ожидаю худшего...) <b>Одобрение</b> (погода, конечно, не при чём) <b>Страдание</b> (сумка тяжёлая, а ещё этот зонтик...)</i>	<i><b>Гордость</b> (предусмотрительный я человек - взял зонтик) <b>Обвинение</b> (погода могла бы быть и получше) <b>Комфорт</b> (прогуляюсь и не вымокну!)</i>

Исследования социальных систем дают основание предположить, что в обществе существуют индивиды, которые стремятся максимизировать различные характеристики: гордость, комфорт и т.п. Чтобы делать это осознанно, они (индивиды) должны иметь достаточно сложную структуру, в частности, иметь представление о себе, партнере и своих отношениях. В наших обозначениях это означает, что структура таких индивидов должна

быть не менее сложной, чем  $S = a^{arb} rb$ . Поскольку каждое из двух отношений в этой формуле может принимать одно из двух значений, получаем всего четыре возможных типа индивидов, названных *нормативными*: *Праведник, Герой, Обыватель и Лицемер*. Их определения приведены в Табл. 4.3, а характеристики – в Приложении 4.

Таблица 4.3. Определение нормативных индивидов

<b>Условное наименование, формула и критерии индивида</b>			
<i>Праведник</i>	<i>Герой</i>	<i>Обыватель</i>	<i>Лицемер</i>
$S = a^{a^{a+b}} \cdot b$	$S = a^{a^{a \cdot b}} \cdot b$	$S = a^{a^{a+b}} + b$	$S = a^{a^{a \cdot b}} + b$
минимум гордости и комфорта (максимум вины и страдания)	минимум вины (максимум гордости)	минимум страдания (максимум комфорта)	минимум вины и страдания (максимум гордости и комфорта)

Приведённая классификация отвечает на вопрос о том, какие ситуации предпочитают различные индивиды. Возникает вопрос: если реакция индивида определяется внешним воздействием и его восприятием, то каким образом он может влиять на ситуацию, и какие способы изменения ситуации будут выбирать разные индивиды? Если индивид в состоянии сам выбирать тип взаимодействия (сотрудничество или конфронтацию), то выбор зависит от того, как он оценивает результат взаимодействия. Эта оценка и критерий выбора определяется структурой сознания (типом) индивида.

Мы будем использовать **принцип максимума этического статуса образа себя**: принимая решение о выборе вида взаимодействия, индивид стремится максимизировать этический статус образа себя. Напомним, что этический статус образа себя  $S_{oc}$  (у индивида) не обязательно совпадает с этическим статусом этого же индивида  $S$  (для внешнего наблюдателя). Перейдём теперь к формализации взаимодействий.

## 4.2. Аксиомы взаимодействия добра и зла. Понятие об этических системах

Исходя из самых общих соображений о том, что такое «добро» и «зло», мы можем сформулировать утверждения, которые для нас будут являться аксиомами (см. Табл. 4.4). Конечно, данные понятия являются крайне сложными, однако напомним принцип адекватности моделирования: определённость понятий и точность исходных данных должны соответствовать решаемой задаче. Далее мы будем обсуждать следствия из принятых аксиом. Напомним, что мы понимаем одинаково термины «добро» и «*позитивный полюс*», и обозначаем их через «1». Аналогично мы понимаем термины «зло» и «*негативный полюс*», обозначаемые как «0». Символы операций булевой алгебры были введены в разделе 3 при описании модели индивида.

Таблица 4.4. Аксиомы взаимодействия индивидов

№ п/п	Формулировка аксиомы	Формальное представление
1	Взаимодействие добра и добра есть всегда добро	$1 + 1 = 1$ $1 \bullet 1 = 1$
2	Взаимодействие зла и зла есть всегда зло	$0 + 0 = 0$ $0 \bullet 0 = 0$
3	Зло, осознавшее себя как зло, есть добро	$0 \rightarrow 0 = 1$
4.1.	Конфронтация добра и зла есть <b>добро</b>	$1 + 0 = 1$
4.2.	Конфронтация добра и зла есть <b>зло</b>	$1 \bullet 0 = 0$
5.1.	Компромисс добра и зла есть <b>зло</b>	$1 \bullet 0 = 0$
5.2.	Компромисс добра и зла есть <b>добро</b>	$1 + 0 = 1$

Первые две аксиомы обычно не вызывают возражений, поскольку могут считаться очевидными, и достаточно хорошо согласуются с практикой.



1. Взаимодействие добра и добра есть всегда добро, независимо от вида взаимодействия (компромисс или конфронтация).
2. Взаимодействие зла и зла есть всегда зло, независимо от вида взаимодействия (компромисс или конфронтация).

Третья аксиома требует некоторого размышления, но также может рассматриваться как достаточно обоснованная. Обычно считают, что если человек совершил плохой поступок, и осознал этот поступок как плохой, то сам факт такого осознания является хорошим фактом (действием, поступком).

3. Зло, осознавшее зло, есть добро.

Наибольшую трудность представляет описание взаимодействия добра и зла. Здесь ситуация оказывается очень похожей на ситуацию с аксиомами геометрии. Как известно, в геометрии оказалось возможным найти альтернативы аксиоме о параллельных прямых: *«Через любую точку, находящуюся вне заданной прямой, можно провести только одну прямую, параллельную исходной»*. Альтернативы этой аксиоме две: таких прямых может быть больше, чем одна (геометрия Лобачевского), и таких прямых может не существовать вообще (геометрия Римана). Эти геометрии также описывают реальные ситуации в определённых условиях, в частности, в физике элементарных частиц. Вы можете сами измерить сумму углов треугольника, нарисованного на глобусе, и сравнить полученное число с известным результатом из геометрии Евклида.

В нашем случае оказалось возможным сразу сформулировать **два варианта аксиом**, и рассмотреть две системы, названные, соответственно, *«первая этическая система»* и *«вторая этическая система»*.

Часть результатов, которые мы сможем получить из нашей модели, относится к области «абсолютной этики», не требующей учёта этической системы. Для других результатов учёт этической системы будет ключевым фактором.

Сразу возникает вопрос: где и как можно обнаружить эти системы в окружающем мире? Ответ: эти системы реально

существуют, и обнаруживаются с помощью применения рассматриваемых нами моделей, а также психологических и социологических исследований. В каждом обществе существуют представители обеих систем, но, как правило, одна из систем является ведущей. Исследования проведены как для реальных социальных систем, так и для персонажей художественных произведений. После изучения данного пособия вы сможете делать это самостоятельно. Однако предварительно надо четко представить себе сами модели и их возможности. Надо помнить, что модели оперируют с абстрактными понятиями. Например, вы можете рассчитать период колебаний реального маятника, но надо помнить, что в основу модели положены достаточно абстрактные предположения: вся масса маятника сосредоточена в одной точке, а сама нить ничего не весит. Продолжим исследование наших моделей.

Допустим, что индивид находится в ситуации, когда он сам может выбрать отношение с партнёром. Состояние индивида ДО выбора может быть представлено выражением  $S = a^{arb} rb$ . Исходя из принципа максимизации этического статуса образа себя  $S_{oc} = a^{arb}$ , индивид всегда должен выбирать отношение •, а не +, поскольку  $\left| a^{a \bullet b} \right| = 1 > \left| a^{a+b} \right| = 3/4$ . Интерпретация отношения будет различной для различных этических систем. Согласно принятой нами системе обозначений этот выбор означает для первой этической системы сотрудничество, а для второй – конфронтацию. Важнейший вывод, который следует из данных соотношений: ***прекращение конфликта (переход от конфронтации к сотрудничеству) всегда оценивается индивидами второй этической системы как понижение своего этического статуса, что воспринимается как потеря собственного достоинства.***

Последствия такого отношения можно проиллюстрировать следующим примером. Представим себе дорогу, по которой идут машины. Обычно каждый водитель стремится быстрее достичь пункта, в который он направляется. Также естественно предположить, что, двигаясь, водители мешают друг другу, и поэтому вступают в постоянные конфликты. Представим себе теперь, что есть две дороги. Водители на первой дороге поднимаются в собственных глазах и в глазах других водителей, если уступают друг другу. А водители машин на второй дороге теряют свое лицо, когда уступают. Ясно, что скорость движения на первой дороге будет выше, чем на второй. Попытки большого числа водителей сохранить свое индивидуальное достоинство путем конфликта оказывают существенное влияние на весь процесс. Они порождают беспорядок в потоке машин, который вызывает замедление движения. Получается, что такой психологический фактор как стремление сохранить достоинство, может приводить к серьезным системным проблемам.

Проведены эксперименты по определению типа этической системы, которой придерживается индивид. Эксперимент состоял в том, что его участникам предлагалось выразить своё собственное согласие или несогласие с утверждениями, соответствующими компромиссу или конфронтации добра и зла. Формулировки приведены в Приложении 4. В соответствии с нашими предположениями, индивиды первой этической системы должны быть в среднем чаще согласны с утверждениями о конфронтации добра и зла, а индивиды второй системы – с утверждениями о компромиссе добра и зла. Статистическая обработка многих экспериментов свидетельствовала о существенной разнице в ответах для исследованных групп людей – представителей различных этических систем.

### 4.3. Индекс доброжелательности и понятие совести

Введем характеристику «индекс доброжелательности»  $D_X$ , которая соответствует степени доброжелательности участника взаимодействия в данной ситуации. По аналогии с введенными ранее характеристиками будем интерпретировать значение индекса, равное 1, как крайнюю доброжелательность, одобрение, симпатию и т.п. Соответственно, значение индекса, равное 0, будем интерпретировать как крайнюю недоброжелательность, неодобрение, враждебность и т.п.

При вычислении индексов мы будем пользоваться следующим представлением ситуации. Конкретное взаимодействие может быть связано со спором, помощью друг другу, денежными расчетами, сдачей экзаменов и т.п. В каждой ситуации могут быть два отношения: *союз* или *конфликт*. В каждой ситуации для каждого участника существует должное отношение  $r$  (точнее, должный выбор отношения из пары «союз - конфликт»). Например, если  $B$  обижает ребенка, то должное отношение к нему со стороны  $A$  - конфликт. Если  $B$  спасает тонущего человека, то должное отношение со стороны  $A$  – союз. В социальных науках используются метафорические названия: *голубем* называют человека, если должное отношение для него союз, и *ястребом*, если должное отношение для него конфликт. Подчеркнем, что наименования «голубь» и «ястреб» применяются нами в зависимости от ситуации: один и тот же человек в разное время и в разных ситуациях бывает и голубем, и ястребом. В конкретной ситуации каждый из участников делает свой выбор. Он может выбрать как должное (для себя) отношение, так и не должное. В каждой ситуации для каждого индивида существует также должная оценка себя и другого индивида: она может быть либо позитивной, либо негативной. Индивида с должной оценкой "позитивно" мы

будем называть *оптимистом*, а с должной оценкой "негативно" - *пессимистом*.

Добавим, что возможны варианты, когда мы не можем быть полностью уверены в своей классификации отношений (голубь - ястреб) и оценок (позитивно - негативно). В этом случае мы будем использовать промежуточные варианты.

Общий алгоритм вычисления индексов доброжелательности  $D_A$  и  $D_B$  соответственно для участников  $A$  и  $B$  следующий.

- Конкретизируется ситуация взаимодействия индивидов  $A$  и  $B$ , а также степень осознания ими этой ситуации (структура формулы).
- Определяется, какое взаимодействие  $r$  (союз или конфликт), реально выбрал каждый участник.
- Конкретизируются представления участников о своих отношениях.
- Определяется, выбрал ли участник должное отношение или не должное.
- Должное отношение записывается в формуле как  $\bullet$  ( $r = \bullet$ ), а не должное как  $\oplus$  ( $r = \oplus$ ).
- Определяется, какова должная оценка участником себя и партнёра: позитивная или негативная.
- Должной оценке соответствует число  $S_X$ , получаемое в результате вычислений по формулам (3.2.), приведенным ниже. Если должная оценка позитивна, полученное число означает степень позитивности, т.е. оценка равна индексу доброжелательности:

$D_X = S_X$ . Если же должная оценка негативна, это число означает степень негативности, и индекс доброжелательности вычисляется как  $D_X = (1 - S_X)$ .

Величина введенного индекса доброжелательности вычисляется с использованием выражений, соответствующих конкретным построенным схемам.

$$S_A = A^A ArB rB ArB, \quad S_B = B^A ArB rB ArB. \quad (4.2)$$

Вычисления производятся по следующим правилам (см. также выражения для гамма-алгебры в Приложении 1):

$$a \oplus b = a + b - a \bullet b; \quad a * b = ((a \oplus b) + (a \bullet b)) / 2 = (a + b) / 2,$$

$$a^b = (1 - a) \oplus b = 1 - b + a \bullet b,$$

$$a^b{}^c = a \binom{b^c}{c} = a(1 - c) + c(1 - b) + abc$$

Вычисленные индексы позволяют понять степень доброжелательности (недоброжелательности) участников, и оценить потенциал ситуации. Близкие к 1 значения позволяют предположить, что ситуация в целом достаточно мирная, и характеризуется высоким уровнем сотрудничества. Близкие к 0 значения говорят, скорее всего, о большом потенциале конфликта. Близкие к 0,5 значения – пограничная ситуация между конфликтом и союзом. Детализированный алгоритм анализа отношений приведен в Приложении 2, вариант графического представления ситуации – в Приложении 3, примеры – в Приложении 4.

Введенные индексы позволяют нам рассматривать динамику (развитие) отношений с течением времени. Для этого мы можем воспользоваться хорошо знакомым аппаратом представления значений функций в декартовой системе координат. В нашем случае мы можем использовать оси координат для представления индекса доброжелательности каждого участника взаимодействия. Ниже на рис. 3.6. приведены примеры перехода от конфронтации к сотрудничеству и от сотрудничества к конфронтации. Измерения индексов доброжелательности участников соответствуют различным моментам времени. Зона конфликта соответствует

значениям индекса у обоих участников, меньшим 0,5, а зона сотрудничества – большим 0,5. Существуют также две зоны отношений, когда доброжелательность одного участника сталкивается с враждебностью другого.

На таком графике можно также изобразить реальные индексы доброжелательности вместе с представлением об этом участников взаимодействия (как они сами это оценивают). Это особенно полезно, когда участники ошибаются в своих оценках.

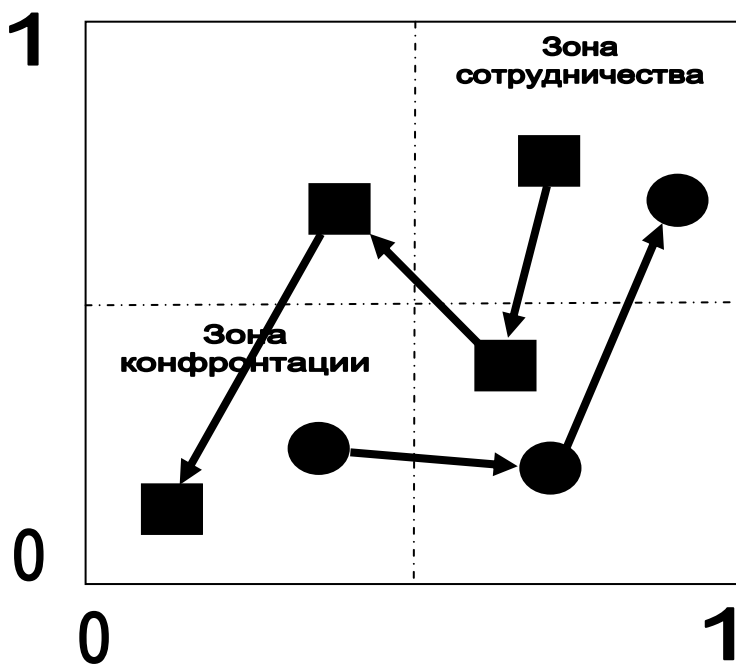


Рис. 4.3. Две траектории развития взаимодействия

С помощью описанного алгоритма мы можем вычислять характеристики конкретной ситуации (см. примеры в Приложении 4). Теперь важно понять, почему участники взаимодействия выбирают именно такие отношения. Если это окажется сложным,

желательно хотя бы спрогнозировать выбор. Такую возможность нам даёт детализированный анализ структуры индивидов – участников взаимодействия, представленный в предыдущем разделе.

Мы завершим рассмотрение наших моделей интерпретацией понятия «*совесть*». Мы думаем, что вы уже это определили сами, однако название учебного пособия обязывает нас тоже это сделать. Подчеркнём, что наше определение (как и все остальные) имеет вполне определённые границы применимости, и не заменяет определений и интерпретаций, принятых в других областях знания.

Мы говорим, что человек «*поступил по совести*», когда этот человек совершил поступок ( $X = 1$ ), который сам он считал хорошим, хотя мир склонял его к совершению плохого поступка ( $x_1 = 0$ ), и человек правильно воспринимал давление мира ( $x_2 = 0$ ). Мы также говорим, что человек «*пошёл на сделку со своей совестью*», если человек совершил плохой поступок, при этом сам он тоже в этот момент считал свой поступок плохим и правильно оценивал давление мира ( $X = 0, x_1 = 0, x_2 = 0$ ).

Отметим, что если человек совершает хорошие поступки ( $X = 1$ ) когда мир создаёт для этого условия ( $x_1 = 1$ ), то совесть в этом процессе никакого участия не принимает. Древнегреческий философ Сократ говорил, что его совесть (которую он называл «демоном») не подсказывает ему, что надо делать, а лишь предупреждает о том, что данное намерение приведёт к совершению плохого поступка. Соответственно, если человек ошибался в оценке ситуации (давления мира), считая что он делает добро, когда на самом деле он причинял кому-то зло, он мог потом сожалеть о своей ошибке, но не испытывать угрызений совести.

Таким образом, мы можем определить **совесть человека** как механизм, с помощью которого человек может увидеть себя совершающим плохой поступок. Закономерности работы этого механизма мы исследовали в нашей книге.



## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы закончили рассмотрение некоторых базовых понятий и моделей рефлексивного анализа. Основные итоги можно подвести следующим образом:

- нетривиальные, но прозрачные математические структуры, использованные для построения моделей, развивают математическую интуицию, а также навыки формализации и интерпретации;
- описанные задачи и примеры способствуют лучшему пониманию межпредметных связей и освоению технологий многодисциплинарных исследований.
- построенные на основе общих соображений формальные математические модели оказываются практически полезными, поскольку позволяют прогнозировать результаты различных измерений и оценивать характеристики взаимодействия людей;
- понимание принципиальных различий этических систем позволяет строить эффективные процедуры взаимодействия, а также избежать катастрофических ошибок непонимания;
- занятия рефлексивным анализом формируют навык осознанного самоанализа и самоконтроля.

Мы надеемся, что эта книжка - только начало знакомства с рефлексивным анализом. Модели и алгоритмы, которые были здесь рассмотрены, являются лишь малой частью этой дисциплины. В свою очередь, рефлексивный анализ – это часть обширной и бурно развивающейся системы подходов к исследованию рефлексивных процессов и управления ими. Здесь ещё много работы для исследователей.

### *Библиографический список*

1. *Лефевр В.А.* Алгебра совести. – М.: «Когито-Центр», 2003. – 426 с.
2. *Лефевр В.А.* Рефлексия. – М.: «Когито-Центр», 2003. – 496 с.
3. *Филимонов В.А.* Системный анализ и «Экран»-технология //Учеб. пособие.- Омск: Изд-во Омского государственного университета, ООО «Агентство Курьер», 2002.- 46 с.
4. *Филимонов В.А.* Интеллектуальные системы и экспертный анализ//Учеб. пособие.- Омск: Изд-во Омского государственного университета, 2002.- 38 с.
5. [www.itam.omsk.net.ru/~filimono](http://www.itam.omsk.net.ru/~filimono) <01.09.06> - домашняя страница автора.

**Булева алгебра и гамма-алгебра: основные определения и соотношения**

Опишем важные математические понятия: *булева алгебра* и *булева функция*. Эти математические структуры названы в честь английского математика Джорджа Буля (1815 - 1864). В настоящее время они изучаются в школе в курсе «Информатика».

**Булевой алгеброй** называют математическую систему из множества элементов, каждый из которых может принимать одно и только одно из двух значений. Эти значения обозначаются обычно как «0» и «1», но могут быть использованы и другие обозначения: «ЛОЖЬ» и «ИСТИНА», «FALSE» и «TRUE». Сами элементы мы будем обозначать буквами латинского алфавита. Для элементов системы заданы операции: отрицания ( $\bar{a}$ ), логического сложения (+) и логического умножения ( $\bullet$ ). Результаты операций заданы следующей системой аксиом:

- |    |   |    |   |
|----|---|----|---|
| 1  | $a + a = a$   | 2  | $a \bullet a = a$                                   |
| 3  | $a + b = b + a$                                     | 4  | $a \bullet b = b \bullet a$                         |
| 5  | $a + (b + c) = (a + b) + c$                         | 6  | $a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$ |
| 7  | $a \bullet (b + c) = (a \bullet b) + (a \bullet c)$ | 8  | $a + (b \bullet c) = (a + b) \bullet (a + c)$       |
| 9  | $a + b = \overline{\overline{a + b}}$               | 10 | $a + 0 = a$   |
| 11 | $a + 1 = 1$   | 12 | $\overline{\overline{a}} = a$                       |
| 13 | $a + \bar{a} = 1$                                   | 14 | $\overline{\overline{1}} = 0$                       |

**Булевой функцией** называют функцию, определённую на множестве элементов булевой алгебры и принимающей значения из этого множества. Формой представления функции является формула. Ключевую роль для нашего исследования играет булева функция, которая носит название **импликация** (от латинского

«*implico*» - тесно связываю). Импликация обозначается как  $b \rightarrow a$  и определяется следующим образом:  $b \rightarrow a = \bar{b} + a$ . Мы будем использовать эту функцию в записи, напоминающей экспоненту:  $b \rightarrow a = a^b$ . Часто эта функция интерпретируется как «из  $b$  следует  $a$ » или « $a$  определяется  $b$ ».

Выражение  $(c \rightarrow b) \rightarrow a$  мы будем записывать как  $a^{b^c}$  и

вычислять в соответствии с правилом  $a^{(b^c)}$  (что эквивалентно выражению  $a + \bar{b} \cdot c$ ). Такое представление в рамках нашей задачи упрощает вычисления. Для контроля правильности вычислений приведём таблицу истинности импликаций (Табл. П1.1). Таблица истинности описывает значения булевой функции для (всех) комбинаций значений входных переменных этой функции. Мнемоническое правило для импликации: «Из лжи может следовать всё, что угодно, а из правды – только правда». Иными словами, импликация принимает значение «ложь» только в том случае, если из истинного предположения выводится ложное следствие.

Мы будем использовать также математический аппарат, предложенный В.А.Лефевром и названный им « *$\gamma$ -алгеброй*» (*гамма-алгеброй*). Операндами гамма-алгебры являются действительные числа в диапазоне  $[0,1]$ . Операции определяются следующим образом ( $a$  и  $b$  - действительные числа из указанного диапазона):

$\bar{a} = 1 - a$ ;  $a \bullet b$  - обычная операция перемножения действительных чисел,

$$a \oplus b = a + b - a \bullet b;$$

$$a^b = (1 - a) \oplus b = 1 - b + a \bullet b,$$

$$a^{b^c} = a^{(b^c)} = a(1 - c) + c(1 - b) + abc.$$

Вводится также операция  $*$ , промежуточная относительно  $\bullet$  и  $\oplus$ :

$$a * b = ((a \oplus b) + (a \bullet b)) / 2 = (a + b) / 2.$$

Сравнение значений таблицы истинности импликаций и значений аналогичных выражений гамма-алгебры для границ области определения аргументов  $[0,1]$  показывает, что эти значения равны. Гамма-алгебра позволяет производить вычисления, подобные логическим вычислениям, для действительных чисел, что расширяет возможности интерпретации результатов вычислений.

Таблица П1.1. Таблица истинности импликаций и значений аналогичных выражений гамма-алгебры

$a$	$b$	$c$	$b \rightarrow a$ $= a^b$	Гамма-алгебра $a^b$	$(c \rightarrow b) \rightarrow a$ $= a^{b^c}$	Гамма-алгебра $a^{b^c}$
1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0

Для вычислений можно воспользоваться средствами *VBA* (*Visual Basic Application*), интегрированными в *Excel*. Один из вариантов макроса для реализации операций гамма-алгебры приведен ниже. В целях упрощения работы с *Excel* в макросе использованы следующие обозначения: «&» вместо «•», «@» вместо « $\oplus$ », «\*» вместо «\*» (промежуточный оператор) и «a^b» вместо « $a^b$ ».

*Function gamma\_algebra(a, operation, b)*

*If operation = "^" Then*

*gamma\_algebra = 1 - b + a \* b*

*ElseIf operation = "@" Then*

*gamma\_algebra = a + b - a \* b*

*ElseIf operation = "&" Then gamma\_algebra = a \* b*

*ElseIf operation = "\*" Then gamma\_algebra = 0.5 \* (a + b)*

*Else gamma\_algebra = a*

*End If*

*End Function*

В целях упрощения вычислений и контроля результатов приведем таблицы для наиболее часто встречающихся в операциях  $a^b = 1 - b + a \bullet b$  и  $a \oplus b = a + b - a \bullet b$  значений переменных (значения для  $a \oplus b$  даны в скобках). Напомним, что  $a^b = (1 - a) \oplus b$ .

Таблица П1.2. Результат выполнения операции  $a^b$  ( $a \oplus b$ )

b	a		
	0	1/2	1
0	1 (0)	1 (1/2)	1 (1)
1/2	1/2 (1/2)	3/4 (3/4)	1 (1)
1	0 (1)	1/2 (1)	1 (1)

Таблица П1.3. Результат выполнения операции

$$a^{b^c} = a \binom{b^c}{c} = a(1-c) + c(1-b) + abc$$

a	$b^c$			
	0	1/2	3/4	1
	только при $b=0, c=1$  =a	при $b=0, c=1/2$ или $b=1/2, c=1$  =a*1/2+1/2	только при $b=1/2, c=1/2$  =a*3/4+1/4	при $b=1$ и/или при $c=0$  =1 при $b=1$ =a при $c=0$
0	0	1/2	1	=1 при $b=1$ =0 при $c=0$
1/2	1/2	3/4	5/8	=1 при $b=1$ =1/2 при $c=0$
1	1	1	1	1

Обратите внимание на нарушение монотонности функции

$a^{b^c}$  при  $c = 0$ .

## Характеристики нормативных индивидов и эксперименты по определению этической системы

Уточним описания индивидов, названных нормативными (см. раздел 4.1). Численные значения нормированных характеристик можно рассчитать аналогично тому, как это сделано для этического статуса: в предположении одинаковой частоты появления входных значений «0» и «1» вычисляется *относительная* частота появления значений «0» и «1» на выходе автомата, описанного соответствующей формулой. Например, значение 0,375 для характеристики «Чувство вины» означает, что в каждой из 1000 (или 10000) ситуаций взаимодействия с кем-либо индивид 375 (3750) раз оценивал себя негативно, и, соответственно, 625 (6250) раз оценивал себя позитивно (т.е. испытывал чувство гордости). Очевидно, что сумма значений для каждой пары нормированных характеристик «вина - гордость», «осуждение - одобрение», «страдание - комфорт» всегда должна равняться единице.

Иногда для численного значения характеристики используется термин «*модуль характеристики S*» и обозначение  $|S|$ .

В экспериментах В.А.Лефевра по анализу этической системы, которой руководствуется индивид, использованы описания различных ситуации взаимодействия добра и зла. Пример набора таких ситуаций (вариант анкеты) приведен ниже в Таблице П2.2. Обратим внимание на то, что утверждения анкеты формально дублируют друг друга, однако с позиций лингвистики и психологии они не являются полностью эквивалентными.



Таблица П2.1. Характеристики нормативных индивидов

Модули Компо- нентов ситуации	Тип, формула и критерии индивида $S =$			
	<i>Праведник</i> $a^{a+b} \cdot b$ минимум гордости и комфорта (максимум вины и страдания)	<i>Герой</i> $a^{a \cdot b} \cdot b$ минимум вины (максимум гордости)	<i>Обыватель</i> $S = a^{a+b} + b$ минимум страдания (максимум комфорта)	<i>Лицемер</i> $S = a^{a \cdot b} + b$ минимум вины и страдания (максимум гордости и комфорта)
Образ себя $S_{oc} = a^{arb}$	0,625	0,875	0,625	0,875
Внутрен- ний мир $S_{вм} = S_{oc}rb$	0,312	0,437	0,813	0,937
Чувство вины (гордости)	0,375 (0,625)	0,125 (0,875)	0,375 (0,625)	0,125 (0,875)
Страдание (комфорт)	0,688 (0,312)	0,563 (0,437)	0,187 (0,813)	0,063 (0,937)
Этический статус	0,844	0,781	0,594	0,531

Таблица П2.2. Вариант анкеты для эксперимента по определению этических систем

Номер ситуации	Формулировка утверждения	Вы согласны ?	
		ДА	НЕТ
1.	1. Можно скрывать от человека, что тот болен неизлечимой болезнью, чтобы уменьшить его страдания.		
	2. Нельзя скрывать от человека, что тот болен неизлечимой болезнью, даже чтобы уменьшить его страдания.		
2.	1. Можно наказать хулигана строже, чем требует закон, если это послужит предостережением для других.		
	2. Нельзя наказать хулигана строже, чем требует закон, даже если это послужит предостережением для других.		
3.	1. Можно давать ложные показания на суде, чтобы помочь невиновному избежать тюрьмы.		
	2. Нельзя давать ложные показания на суде, даже чтобы помочь невиновному избежать тюрьмы.		
4.	1. Можно послать шпаргалку на конкурсном экзамене, чтобы помочь близкому другу		
	2. Нельзя послать шпаргалку на конкурсном экзамене, даже чтобы помочь близкому другу		

Результат анализа приведён в Таблице П2.3.

Таблица П2.3. Анализ утверждений для эксперимента по определению этических систем

Номер и описание ситуации	Квалификация утверждения о взаимодействии добра и зла	Оценка ситуации в этической системе («1» – добро, «0» - зло)	
		<i>Первая система</i>	<i>Вторая система</i>
1. Соккрытие правды = зло, Уменьшение страданий = добро	1. Компромисс	<b>0</b>	<b>1</b>
	2. Конфронтация	<b>1</b>	<b>0</b>
2. Нарушение закона = зло, Предостережение для других = добро	1. Компромисс	<b>0</b>	<b>1</b>
	2. Конфронтация	<b>1</b>	<b>0</b>
3. Ложные показания на суде = зло, Помочь невиновному = добро	1. Компромисс	<b>0</b>	<b>1</b>
	2. Конфронтация	<b>1</b>	<b>0</b>
4. Обман на экзамене = зло, Помочь близкому другу = добро	1. Компромисс	<b>0</b>	<b>1</b>
	2. Конфронтация	<b>1</b>	<b>0</b>

## Алгоритм вычисления индекса доброжелательности

### 1. Исходное представление.

Задаём (называем, описываем) ситуацию  $S$  и участников  $A$  и  $B$ .

### 2. Анализируем участников относительно вида взаимодействия

Если участник в такой же ситуации с этим же участником или другими людьми *обычно* выбирает вид взаимодействия «союз» как *должное отношение*, то мы считаем, что его тип «голубь», а если он выбирает вид взаимодействия «конфликт», то его тип «ястреб».

### 3. Анализируем оценку себя участниками

Если участник в такой же ситуации с этим же участником или другими людьми *обычно* считает себя и партнёра хорошими, то мы будем говорить, что он оптимист, и его должная оценка позитивная, иначе мы будем говорить, что он пессимист и его должная оценка ситуации негативная.

### 4. Анализируем выбор взаимодействия в анализируемой ситуации

Представление о выборе участником в *этой* ситуации своего *должного отношения* (голубь – союз, а ястреб – конфликт) мы будем обозначать символом  $\bullet$ , иначе (если он выбирает не должное отношение) символом  $\oplus$ . Если мы не знаем или не понимаем, какое отношение выбрано: союз или конфликт, будем считать отношение нейтральным и обозначим это символом  $*$ .

### 5. Формируем графическое представление ситуации (рисует картинку)

Рисуем картинки, представляющие участников ситуации. Полное возможное графическое описание ситуации представлено шаблоном на рис. ПЗ.1. Если мы (и/или участники) не анализируем

свои представления о представлениях, схема становится более простой (но и менее информативной): исчезают элементы, о которых мы ничего не можем сказать, даже, например, о том, есть они или нет. То, что мы знаем (тип участников, вид отношений) мы изображаем на схеме.

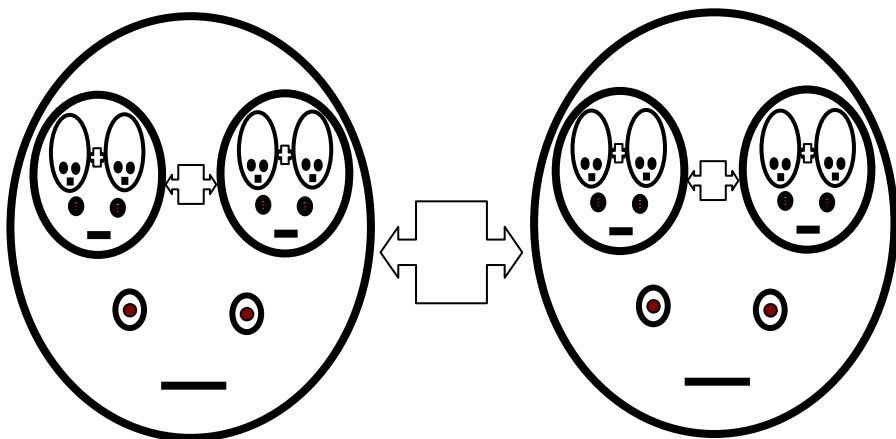


Рис. ПЗ.1. Общий шаблон для представления ситуации

### 6. Формируем алгебраическое представление участников ситуации

Записываем выражения для вычисления индексов доброжелательности  $S_A$  и  $S_B$  каждого из участников (это ещё не сами индексы доброжелательности!) в соответствии с полученными рисунками. Уровень вложенности образов на рисунках соответствует степени в формулах:

$$S_A = A^A ArB_rB ArB ; S_B = B^A ArB_rB ArB .$$

Вычисления производятся по следующим правилам (см. Приложение 1):

$$a \oplus b = a + b - a \bullet b; \quad a * b = ((a \oplus b) + (a \bullet b)) / 2 = (a + b) / 2,$$

$$a^b = (1 - a) \oplus b = 1 - b + a \bullet b,$$

$$a^{b^c} = a^{\binom{b^c}{}} = a(1 - c) + c(1 - b) + abc$$

Примеры использования алгоритма приведены в приложении 4.

Должной оценке соответствует число  $S_X$ , получаемое в результате вычислений по формулам (4.2). Если должная оценка позитивна, полученное число означает степень позитивности, т.е. оценка равна индексу доброжелательности:  $D_X = S_X$ . Если же должная оценка негативна, это число означает степень негативности, и индекс доброжелательности вычисляется как  $D_X = (1 - S_X)$ .

## П4. Примеры анализа и формализации

В этом разделе представлены примеры двух вариантов формального анализа рефлексивных ситуаций. Первый вариант приведен для освоения методики расчета характеристик формализованных ситуаций, описанной в данном пособии. Второй вариант демонстрирует сложность этапа формализации.

### П4.1. Пример анализа: конфликт на работе

Анализируемая ситуация следующая: начальник А отчитывает подчиненного В за плохо выполненную работу. Нам известно, что А – ястреб и пессимист, В – голубь и оптимист. Индивид А выбрал должное (типичное для себя в таких ситуациях) отношение - конфликт, индивид В также выбрал конфликт, но для него это отношение не является должным. На основе нашего опыта (знакомства с этими людьми и их отношениями) мы можем представить данную ситуацию графически. Можно использовать разные способы; мы воспользуемся классическим «матрешечным» (рис П4.1):

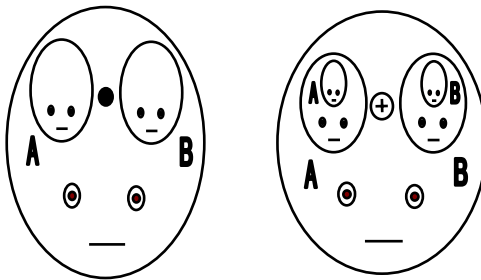


Рис. П4.1. Графическое представление ситуации:

Графическое представление преобразуется в алгебраическую формулу в соответствии с описанными правилами. Алгебраическое представление позволяет вычислить искомые характеристики: индексы доброжелательности  $D_A$  и  $D_B$  через представление ситуаций  $S_A$  и  $S_B$ :

$$S_A = \frac{1}{2} \overset{\bullet}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + (1 - \frac{1}{4}) - \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{4}) = \frac{7}{8} = 0,875.$$

$$S_B = \frac{1}{2} \overset{\oplus}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4} = \frac{15}{16} = \frac{17}{32} = 0,531...$$

Вычислим индексы доброжелательности. Поскольку А пессимист, оценка для А соответствует среднему значению негативности, с которой А оценивает В. Индекс доброжелательности равен  $D_A = (1 - S_A) = (1 - 0.875) = 0,125$ . Это крайне низкое значение.

Поскольку В оптимист, оценка для В соответствует среднему значению позитивности, с которой В оценивает А. Индекс доброжелательности равен  $D_B = S_B = 0,531$ . Это значение хоть и незначительно, но превышает порог конфронтации 0,5.

Как подчинённый может улучшить ситуацию - уменьшить потенциал конфликта и повысить доброжелательность? Сложный, но благородный путь состоит в том, чтобы в результате переговоров у его собеседника появился «*третий этаж*» - представление о том как оба собеседника воспринимают ситуацию. хотя бы на уровне собственного (для В) анализа. Если это удастся сделать даже в условиях сохранения конфликта, то



$$S_A = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{16} = 1 - \frac{9}{16} + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{16} = \frac{23}{32} = 0,71875.$$

и

$$D_A = (1 - S_A) = (1 - 0,71875) = 0,28125.$$

Очевидно, что в целом ситуация может улучшиться, поскольку индекс доброжелательности вырос за счет правильного ведения переговоров.

## П4.2. Пример формализации: день рождения ослика Иа

Книга «*Винни-Пух и все-все-все*» А. Милна является не только увлекательным повествованием, но и предметом междисциплинарных исследований. В качестве одного из многочисленных примеров можно указать книгу В. Руднева «*Винни-Пух и философия обыденного языка*» (М.: Изд-во Аграф, 2002). Мы рассмотрим два эпизода взаимодействия героев книги («*глава 6, в которой у Иа день рождения и он получает два подарка*»). Сначала в соответствии с нашим алгоритмом охарактеризуем стандартные реакции персонажей на типичные ситуации:

- Медвежонок Винни-Пух, очевидно, является *голубем* (он обычно не вступает в конфликты) и *оптимистом* (склонен считать себя и своих партнёров хорошими);
- Поросёнок Пятачок, как правило, избегает конфликтов, обычная его реакция – сотрудничество либо нейтральная: в случае опасности он стремится исчезнуть под благовидным предлогом; эту реакцию можно оценить величиной  $0,75=(1+0,5)/2$ . В нашей терминологии, Пятачок ближе к *голубям*, чем к ястребам. По-видимому, он является *оптимистом*, хотя во многих ситуациях демонстрирует свои опасения.
- Ослик Иа обычно критически настроен по отношению к окружающим и себе самому, и это выражает в виде иронических замечаний. Иа – *пессимист*: себя и всех остальных он считает плохими (точнее, недостаточно хорошими). Его обычная реакция – нейтральная либо агрессивная: он не шутит, а иронизирует, при этом считает, что его высказывания недоступны для интеллекта собеседников. Такую реакцию можно оценить величиной  $0,25=(0+0,5)/2$ . В нашей терминологии, Иа ближе к *ястребам*, чем к голубям.

Оценим уровень рефлексии данных персонажей:

- Винни-Пух умеет представить ход своих мыслей и, в частности, достаточно реалистично оценивает свои интеллектуальные способности, а также то, как его воспринимают другие. Он достаточно регулярно осуществляет рефлексивные операции: «*Что подумают пчёлы?*», «*Ослику Иа это может не понравиться*», «*У меня в голове опилки, и я не понимаю длинные слова*». Винни-Пуху (в оригинале – **Winnie-the-Pooh**) можно сопоставить следующую формулу:

$$S_W = A^A ArB rB ArB .$$

- Пятачок в большинстве случаев действует без учета модели партнёра, он просто знает, что обычно определённые действия (например, вручение подарков) одобряются, а другие – нет, о себе он также не очень задумывается. Формула для Пятачка (**Piglet**) самая простая («3-й этаж» в формуле отсутствует):

$$S_P = A^A rB .$$

- Иа постоянно размышляет о своём образе себя с точки зрения себя и других, причём уверен, что другие на это не способны, поскольку они менее интеллектуальны, чем он сам. Формула для Иа (**Eeyore**):

$$S_E = A^A ArB rB .$$

Теперь мы можем приступить к формализации эпизодов. Здесь одна из главных трудностей – правильно определить вид взаимоотношений, в частности, отличить «*худой мир*» от «*доброй ссоры*».

Рассмотрим два варианта отношения типа «союз».

- Эпизод 1. Пятачок вручает Иа лопнувший шарик; по форме взаимодействие похоже на конфликт: Пятачок плачет, Иа крайне огорчён. Однако взаимодействие образовалось в результате реализации позитивных намерений; для описания похожих ситуаций часто используется термин «медвежья услуга». То, что это союз и относительно Иа, подтверждает то, что он не позволяет себе своих обычных злых шуток. С точки зрения внешнего наблюдателя, никто из них не является агрессором, скорее, они оба – жертвы обстоятельств и собственных иллюзий.
- Эпизод 2. Винни-Пух дарит Иа полезный горшок, налицо явно сотрудничество, при этом оба счастливы (хотя первоначальная реакция ИА – агрессивная («У меня уже есть один подарочек!») - иронизирует он).

Очевидно, что, несмотря на похожесть ситуаций, вторая более соответствует представлению о союзе. Оценим это количественно.

Чтобы нам было легче и быстрее производить вычисления, используем систему электронных таблиц Excel. Сначала в Таблице П4.1. запишем общую формулу согласно правилам (структуре) нумерации ячеек в таблицах Excel (сравни с Табл. 4.1.).

Таблица П4.1 Представление взаимодействия индивидов (общая формула со всеми компонентами на трёх уровнях)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
1	Индивид А											Индивид В									
2			A	r	B			A	r	B				A	r	B			A	r	B
3		A				r	B						A				r	B			
4	A										r	B									

Теперь запишем формулы для представления взаимодействия наших персонажей, сохраняя на своих местах имеющиеся компоненты, и убирая те, которые отсутствуют в

формуле для данного персонажа. Отсутствующий компонент можно либо обозначить каким-нибудь символом (например, «-»), как это сделано в Таблице П4.2, либо просто оставить пустой соответствующую ячейку, как в Таблице П4.3. Добавим к таблицам по три строки (№№ 5-7) для записи численных значений характеристик и символов отношений, и ещё строку (№ 8) для записи результатов вычислений. Обозначения операций модифицированы (см. программу вычислений в Приложении 1).

По нашим предположениям, должная оценка в обоих эпизодах в целом у всех персонажей позитивная: ведь даже по мнению пессимиста Иа день рождения должен быть праздником. Поэтому мы интерпретируем все вычисленные значения как индексы доброжелательности.

Таблица П4.2. Расчеты для эпизода «Пятачок и Иа»

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
1	Пятачок											Иа									
2			-	-	-			-	-	-				-	-	-			P	r	E
3		P				r	E						P				r	E			
4	P										r	E									
5			-	-	-			-	-	-				-	-	-			0,0	*	1
6		0,5				*	0,5						0				*	1			
7	0,75										*	0,25									
8	0,875 = индекс Пятачка											0,625 = индекс Иа					0,75= индекс ситуации				

Приведём обоснование выбранных нами значений и операторов. В целях упрощения предварительной интерпретации мы считаем все отношения в этих эпизодах промежуточными (средними между союзом и конфликтом). Также в большинстве случаев мы оцениваем как промежуточные состояния персонажей и их представления об этих состояниях. Однако отдельные характеристики можно попытаться детализировать.

В первом эпизоде с точки зрения Иа Пятачок может быть оценен негативно - не уберёт подарок; негативной оценке соответствуют значения «0» в клетках (ячейках) **M6** (восприятие Иа Пятачка) и **S5** (оценка Пятачка в «образе другого» у Иа) Таблицы П5.2. Сам Иа оценивается позитивно: он достойно реагирует на тяжелую ситуацию, воздерживается от обвинения своего партнёра и, наверное, гордится этой своей способностью. Позитивной оценке соответствуют значения «1» в клетках **R6** (восприятие себя Иа) и **U5** (образ себя у Иа) этой же таблицы. В итоге мы имеем достаточно высокий индекс доброжелательности 0,875 у Пятачка (он чувствует свою вину и готов её загладить), и позитивный индекс 0,625 у Иа (он опечален, но конфликтовать даже в своей обычной форме иронии не собирается). Доброжелательность ситуации в целом 0,75 – достаточно высокая.

Таблица П4.3 Расчеты для эпизода «Винни-Пух и Иа»

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
1	Винни-Пух										Иа										
2			W	r3	E			W	r	E								W	r	E	
3		W				r2	E						W				r	E			
4	W										r	E									
5			0,5	&	1			0,5	&	1									0,5	&	1
6		0,5				&	1						0,5				&	1			
7	1										&	0,5									
8	1,00 = индекс Винни-Пуха										0,75 = индекс Иа					0,75 = индекс ситуации					

С точки зрения внешнего наблюдателя Винни-Пух выполняет функцию миротворца и оценивается безусловно позитивно («1» в клетке A7). Сам Винни-Пух скромно считает, что он находится в обычном состоянии, именно так сам себя оценивает, и думает, что Иа оценивает его так же («0,5» соответственно в клетках B6, C5 и H5). В восприятии (G6), представлении (E5) и в рефлексивном для Иа (J5) представлении Винни-Пуха Иа в

качестве именинника выглядит положительно (значение «1» в указанных клетках). Что касается  $I_a$ , то он, как пишет автор книги *«счастлив так, как только мог»* («1» в клетках R6 и U5). Формулировка абсолютно точная, поскольку с позиции внешнего наблюдателя доброжелательность  $I_a$  уступает доброжелательности Винни-Пуха, и заслуживает только оценки 0,5 (L7). Однако вычисления с учетом представлений участников позволяют повысить этот уровень до 0,75 (индекс  $I_a$ ). Оценка позитивности ситуации в целом совпадает с оценкой предыдущей ситуации, хотя доброжелательность самих участников несколько выше.

Вы можете не согласиться с нашей формализацией этих ситуаций, построить свои модели и поэкспериментировать с ними. Это будет интересная работа.

**Филимонов Вячеслав Аркадьевич**

**АЛГЕБРА ЛОГИКИ И СОВЕСТИ**

Учебное пособие

Оригинал-макет автора

Дизайн обложки    Инга Улигова

Лицензия ЛР № 021278 от 06.04.1998 г.

Подписано в печать \_\_.09.06. Формат 60x84 1/16

Бумага \_\_\_\_\_. \_\_\_\_\_ способ печати.

Усл. печ. л. 4,88. Уч.-изд. л. 4,8. Тираж 100 экз.

Изд. № \_\_\_\_\_. Заказ № \_\_\_\_\_. Цена договорная

Издательско-полиграфический центр ОГИС  
644099, Омск, ул. Красногвардейская, 9